

الى أبناء
وطني
2016-2017
الطريق الى الـ 100
حلول جميع الاسئلة
الوزارية 1996-2016
السادس
الاحيائي
قصي هاشم
07902162268
جمهورية العراق
REPUBLIC OF IRAQ
رحلة
التفوق
في السادس
عطاء بلا حدود
A.M.Z
وزارة التربية
MINISTRY OF EDUCATION

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص) : ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بين ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الى مجموعة قنواتنا التدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطرق الدراسة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشوكة بعض المحسوبين على الكادر التدريسي ممن يرفضون نشر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كادر الشبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشباب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د : اشرف الوائلي

ا.د : مينا الاحمد




الى أبناء
وطني
2016-2017
عزيزي الطالب اعلم ان ...
اذا اهدرت وقتك الان فلا تلم الا نفسك غدا
اصبر على مالاتحب من المواد من اجل ما لاتحب
هذه الدنيا مسألة حسابية ... اجعل من اليوم عبرة ومن
الامس خبرة ... اجمع لها الجد والاجتهاد
واطرح منها التعب والشقاء
واترك الباقي على رب السماء
ابعد وسائل التسلية
والترفيه عن مكان
المذاكرة
قصي هاشم
07902162268
جمهورية العراق
REPUBLIC OF IRAQ
رحلة
التفوق
في السادس
عطاء بلا حدود
A.M.Z
وزارة التربية
MINISTRY OF EDUCATION

حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الاول (مجموعة الاعداد المركبة) مرتبة حسب تسلسل المنهج المقرر

1999 دور 1

جد بالصيغة العادية للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

Sol: $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(3-1)+(-3-1)i}{1+1}\right)^2 = \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2$

$= (1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$

2000 دور 1

اذا كانت $x=2+3i$, $y=3-i$ جد قيمة $x^2 + 2y^2$

sol: $x^2 + 2y^2 = (2+3i)^2 + 2(3-i)^2 = (4 + 12i + 9i^2) + 2(9 - 6i + i^2)$
$= (-5 + 12i) + 2(8 - 6i) = (-5 + 12i) + (16 - 12i) = 11 + 0i$

2004 دور 1

جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1 - \sqrt{3}\,i)^2 - (2 - \sqrt{3}\,i)^2$

sol: $(1 - \sqrt{3}\,i)^2 - (2 - \sqrt{3}\,i)^2 = (1 - 2\sqrt{3}\,i + 3i^2) - (4 - 4\sqrt{3}\,i + 3i^2)$

$= (-2 - 2\sqrt{3}\,i) - (1 - 4\sqrt{3}\,i) = (-2 - 2\sqrt{3}\,i) + (-1 + 4\sqrt{3}\,i)$

$= -3 + 2\sqrt{3}\,i$

2005 دور 1

جد ناتج بالصيغة الديكارتية $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 + i)$

sol: $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 + i) = (9 + 24i + 16i^2) + (5 + 5i - 3i - 3i^2)$
$= (-7 + 24i) + (8 + 2i) = 1 + 26i = (1, 26)$

1998 دور 1

ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1 + 3i)^2 + (3 - 2i)^2$

sol : $(1 + 3i)^2 + (3 - 2i)^2 = (1 + 6i + 9i^2) + (9 - 12i + 4i^2)$
$= (-8 + 6i) + (5 - 12i) = -3 - 6i$

2002 دور 1

ضع مايأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي$(3 + 2i)(-2 + i)$

sol : $c = (3 + 2i)(-2 + i) = -6 + 3i - 4i + 2i^2 = -8 - i$

$$C^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{-8-i} = \frac{1}{-8-i} \cdot \frac{-8+i}{-8+i} = \frac{-8+i}{64+1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65} i$$

2003 دور 1

جد النظير الضربي للعدد المركب $3 + 5i$ ثم ضعه بالصورة العادية .

sol : $C^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3+5i} = \frac{1}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = \frac{3-5i}{9+25} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34} i$

2005 دور 2

اذا كانت $x = -1 + 2i$ جد قيمة $x^2 + 3x + 5$ بالصيغة الديكارتية (ارجاند)

sol: $x^2 + 3x + 5 = (-1 + 2i)^2 + 3(-1 + 2i) + 5$

$= (1 - 4i + 4i^2) + (-3 + 6i) + 5$

$= (-3 - 4i) + (2 + 6i) = -1 + 2i = (-1, 2)$ وهي صيغة ارجاند المطلوبة

2009 دور 2

حل المعادلة $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

sol : $z^4 + 13z^2 + 36 = 0 \Rightarrow (z^2 + 9)(z^2 + 4) = 0$

either $z^2 = -9 \Rightarrow z = \pm 3i$ OR $z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$

2013 دور 1

جد قيمة $(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3)$

sol : $(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3) = (1 - i)(1 + 1)(1 + i) = (2)(1 + 1) = (2)(2) =$

2010 تمهيدي

اذا كان $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3 + b^3) = 7$

sol : $a + bi = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow 2(a^3 + b^3) = 2\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right) = 2\left(\frac{28}{8}\right) = 7$

2012 دور 3

اثبت ان $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

sol : $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i} = \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{-2i+2i^2}{1+1} + \frac{2i+2i^2}{1+1} = (-1 - i) + (-1 + i) = -2$

2012 دور 2

ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(1+i)^5 - (1-i)^5$

sol : $(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = [(1+i)^2]^2(1+i) = (1+2i+i^2)^2(1+i)$

$= (2i)^2(1+i) = 4i^2(1+i) = -4(1+i) = -4-4i$

$(1-i)^5 = (1-i)^4(1-i) = [(1-i)^2]^2(1-i) = (1-2i+i^2)^2(1-i)$

$= (-2i)^2(1-i) = 4i^2(1-i) = -4(1-i) = -4+4i$

$(1+i)^5 - (1-i)^5 = (-4-4i) - (-4+4i) = (-4-4i) + (4-4i) = 0 - 8i$

2007 خارج القطر

اذا كان $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

sol : $x^2 + 2x + 6 = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$

$= (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 6 = (-3 - 4i) + (4+4i) = 1 + 0i$

2013 خارج القطر

ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادلة للعدد المركب

sol : $\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64} = \frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64} = \frac{(1-2i+i^2)^6(1-i)}{64}$

$= \frac{(-2i)^6(1-i)}{64} = \frac{64i^6(1-i)}{64} = \frac{-64(1-i)}{64} = -(1-i) = -1+i$

1996 دور 1

جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(2x+i)(y-2i) = -2-9i$

sol : $(2xy + 2) + (-4x + y)i = -2 - 9i$

$2xy + 2 = -2 \Rightarrow 2xy = -4$ .... (1

$-4x + y = -9 \Rightarrow y = 4x - 9$ .... (2 نعوض (2) في (1)

$2x(4x-9) = -4 \Rightarrow [8x^2 - 18x + 4 = 0] \div 2 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$

$(4x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = 1$ اما $\Rightarrow x = \frac{1}{4} \therefore y = 1 - 9 = -8$

$x - 2 = 0$ او $\Rightarrow x = 2 \therefore y = 8 - 9 = -1$

2006 دور 1

جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(2x+i)(y+2i) = 2+9i$ واجب بنفس الاسلوب

Ans : $x = \frac{1}{4} \rightarrow y = 8$, $x = 2 \rightarrow y = 1$

1998 دور 2

جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

sol : $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$ ⇨ $(-2x + 2i - x^2 i + x i^2) = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$

$(-2x - x) + (2 - x^2) = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$ ⇨ $(-3x) + (2 - x^2) i = 3y - 7i$

$-3x = 3y$ ⇨ $-x = y$ …. (1)

$2 - x^2 = -7$ ⇨ $x^2 = 9$ ⇨ $x = \pm 3$

$x = 3$ ⇨ $y = -3$, $x = -3$ ⇨ $y = 3$

1999 دور 2

جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

sol : $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$ ⇨ $9x^2 + 12xyi + 4y^2 i^2 = \frac{200}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$

$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = \frac{200(4-3i)}{25}$ ⇨ $(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 8(4 - 3i)$

$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 32 - 24i$

$9x^2 - 4y^2 = 32$ …… (1) , $12xy = -24$ ⇨ $y = \frac{-2}{x}$ …. (2) in (1)

$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32$ ⇨ $\left[9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32\right] . x^2$

$9x^4 - 16 = 32x^2$ ⇨ $9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$

$(9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$ ⇨ either $9x^2 + 4 = 0$ غير ممكن لانه مجموع مربعين

OR $x^2 = 4$ ⇨ $\begin{cases} x = 2 \rightarrow y = -1 \\ x = -2 \rightarrow y = 1 \end{cases}$

2000 دور 2

جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق $x(x + i) + y(y - i) + i = 13$

sol: $(x^2 + xi) + (y^2 - yi) = 13 - i$ ⇨ $(x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$

$x^2 + y^2 = 13$ ….. (1) , $x - y = -1$ ⇨ $x = y - 1$ …. (2) in 1

$(y - 1)^2 + y^2 = 13$ ⇨ $y^2 - 2y + 1 + y^2 - 13 = 0$ ⇨ $2y^2 - 2y - 12 = 0$

$y^2 - y - 6 = 0$ ⇨ $(y - 3)(y + 2) = 0$

either $y = 3$ ⇨ $x = 3-1 = 2$ OR $y = -2$ ⇨ $x = -2 - 1 = -3$

2004 دور 2
2005 دور 2

جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

sol : $\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right) y = \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right)$

$\left(\frac{(2-1)+(-2-1)i}{1+1}\right)x + \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{4+1}\right) y = -i$

$(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)x + (1-i)y = 0 - i \Rightarrow (\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi) + (y - yi) = 0 - i$

$(\frac{1}{2}x + y) + (-\frac{3}{2}x - y)i = 0 - i$

$\frac{1}{2}x + y = 0 \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$ .... (1

$-\frac{3}{2}x - y = -1 \Rightarrow -3x - 2y = -2$ .... (2

$6y - 2y = -2 \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = (-2)(\frac{-1}{2}) = 1$

ملاحظة \\ اذا وجد i وحده في المقام يمكن ان نضرب البسط بالعدد (1) ونعبر عنه اما $(-i^2)$ او (i^4) ثم نختصر البسط مع المقام

2006 تمهيدي

جد قيمتي x,y الحقيقيتين التي تحقق $(x + i)(y - 3i) = -1 - 13i$

sol : $xy - 3ix + iy - 3i^2 = -1 - 13i$

$(xy + 3) + (-3x + y) = -1 - 13i$

$xy + 3 = -1 \Rightarrow xy = -4$ .....(1)

$-3x + y = -13 \Rightarrow y = 3x - 13$ .... (2) in 1

$x(3x - 13) = -4 \Rightarrow 3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 4) = 0$

either $x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3(\frac{1}{3}) - 13 = 1 - 13 = -12$ OR $x = 4 \Rightarrow y = 12 - 13 = -1$

2006 دور 2

جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق $(3x - i)(2y + i) + 11 = 7i$

sol: $6xy + 3xi - 2yi - i^2 = -11 + 7i \Rightarrow (6xy + 1) + (3x - 2y)i = -11 + 7i$

$6xy + 1 = -11 \Rightarrow 6xy = -12 \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$ .... (1) in (2)

$3x - 2y = 7$ .... (2) $\Rightarrow [\,3x + \frac{4}{x} = 7\,].x \Rightarrow 3x^2 + 4 = 7x$

$3x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 4)(x - 1) = 0$

either $x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-3}{2}$ OR $x = 1 \Rightarrow y = -2$

2008 دور 2

جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق $y + 5i = (2x + i)(x + i)$

sol: $y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi + i^2 \Rightarrow y+5i = (2x^2 - 1) + 3x\,i$

$2x^2 - 1 = y$ .... (1) , $3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ in (1) $\Rightarrow 2\left(\frac{25}{9}\right) - 1 = y$

$y = \frac{50}{9} - 1 = \frac{50-9}{9} = \frac{41}{9}$

2009 تمهيدي

جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق $(3 + 2i)^2 y = (x + 3i)^2$

sol : $(9 + 12i + 4i^2)\, y = (x^2 + 6ix + 9i^2)$

$(5 + 12i)y = (x^2 - 9) + 6ix \Rightarrow 5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6ix$

$5y = x^2 - 9$ .... (1) , $12y = 6x \Rightarrow x = 2y$ .... (2) in 1

$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0 \Rightarrow (4y - 9)(y + 1) = 0$

either $y = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$ OR $y = -1 \Rightarrow x = -2$

2010 دور 1

جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق $12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$

sol : $12 + 5i = xy - 2xi + 3yi - 6i^2 \Rightarrow 12 + 5i = (xy + 6) + (-2x + 3y)\,i$

$xy + 6 = 12 \Rightarrow xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$ .....(1) in 2 , $-2x + 3y = 5$ ... (2)

$-2x + 3\left(\frac{6}{x}\right) = 5 \Rightarrow -2x^2 + 18 = 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$

$(2x + 9)(x - 2) = 0$

either $x = \frac{-9}{2} \Rightarrow y = 6\left(\frac{-2}{9}\right) = \frac{-4}{3}$ OR $x = 2 \Rightarrow y = 3$

2012 دور 1

جد قيمتي x , y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{5}{x+yi}$, $\frac{2+i}{3-i}$ مترافقان

sol: $\overline{\left(\frac{2+i}{3-i}\right)} = \frac{5}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{2-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}\right) = \frac{5}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{10}\right) = \frac{5}{x+yi}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{x+yi} \Rightarrow 1 - i = \frac{10}{x+yi} \Rightarrow x + yi = \frac{10}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \Rightarrow x + yi = \frac{10(1+i)}{2}$

$x + yi = 5 + 5i \Rightarrow x = 5 , y = 5$

2015 دور 3

جد قيمتي x , y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

sol: $\left(\frac{3+i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{5}\right) = \frac{6}{x+yi}$

$1 - i = \frac{6}{x+yi} \Rightarrow x + yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \Rightarrow x + yi = \frac{6(1+i)}{2}$

$x + yi = 3 + 3i \Rightarrow x = 3 , y = 3$

2012 خارج القطر

2015

جد قيمتي x , y الحقيقيتان اذا علمت ان $\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x+yi) = (1+2i)^2$

sol : $\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + (x+yi) = (1+4i+4i^2) \Rightarrow \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right) + (x+yi) = (1+4i-4$

$(0 - i) + (x + yi) = -3 + 4i \Rightarrow (x) + (-1 + y)i = -3 + 4i$

$x = -3 , -1 + y = 4 \Rightarrow y = 5$

2003 دور 3

جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$

الحل \\

$\frac{x^2-4i^2}{x+2i} = \frac{y}{1+i} \Rightarrow \frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i} = \frac{y}{1+i} \Rightarrow x - 2i = \frac{y}{1+i}$

$(x - 2i)(1 + i) = y \Rightarrow (x + 2) + (x - 2)i = y + 0i$

$x + 2 = y$ .... (1 , $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 + 2 = 4$

2016 تمهيدي

جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق المعادلة $\frac{125}{11+2i}x+(1-i)^2y=11$

sol : $\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}x+(1-2i+i^2)y=11$ ⇨ $\frac{125\,(11-2i)}{125}x+(-2i)y=11$

(11x – 2xi) + (0 – 2yi) = 11 ⇨ (11x) + (- 2x – 2y) i = 11 + 0i

11x = 11 ⇨ x = 1 , - 2x – 2y = 0 ⇨ - x – y = 0 ⇨ - 1 – y = 0 ⇨ y = - 1

تلميح \\ هناك طرق اخرى لحل السؤال كأن تضرب كل المعادلة في (11 + 2i) للتخلص من المقامات او ان نجعل العدد **125** بالصورة التالية $125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11+2i)(11-2i)$ ثم تختصر مع المقام .

علما ان السؤال بصيغته الحالية غير موجود نصا في الكتاب المدرسي

2016 دور 2

جد قيمتي x , y ∈ R اذا علمت ان $(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$

sol: $(x^2 - xi + 2xi - 2i^2) = \frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$

$(x^2+2)+(-x+2x)i=\frac{(11-3yi)(11+3yi)}{11+3yi}$

$(x^2+2)+(x)i = 11-3yi$

$x^2+2=11$ ⇨ $x^2=9$ ⇨ $x=\pm 3$

x = - 3y ⇨ x=3 ⇨ 3 = -3y ⇨ y = -1 ,,, x = -3 ⇨ -3 = -3y ⇨ y = 1

تأكيد \\ يمكن تبسيط الطرف الايمن من خلال الضرب بالعامل المرافق كما موضح ادناه

$$\frac{121+9y^2}{11+3yi}\cdot\frac{11-3yi}{11-3yi}=\frac{(121+9y^2)(11-3yi)}{(121+9y^2)}=11-3yi$$

2006 تمهيدي

اذا كان x = 3+2i , y = 1 – i اثبت ان $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$

LHS : $\overline{x+y}=\overline{(3+2i)+(1-i)}=\overline{4+i}=4-i$

RHS: $\bar{x}+\bar{y}=\overline{(3+2i)}+\overline{(1-i)}=(3-2i)+(1+i)=4-i$ ⇨ LHS = RHS

2014 تمهيدي

اذا كان $C_1= 7 - 4i$, $C_2=2 - 3i$ فتحقق من : $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

$$LHS: \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\right)} = \overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i}\right)} = \overline{\left(\frac{14+21i-8i+12}{4+9}\right)} = \overline{\left(\frac{26+13i}{13}\right)} = \overline{2+i} = 2 - i$$

$$RHS: \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{7-4i}}{\overline{2-3i}} = \frac{7+4i}{2+3i} = \frac{7+4i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{14-21i+8i+12}{4+9} = \frac{26-13i}{13} = 2 - i$$

1997 دور 1

اذا كان $c,d\in R$ وكان $c + di = \frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c - di}$.

sol: $c + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{14-7i-8i-4}{4+1} = \frac{10-15i}{5} = 2 - 3i \Rightarrow c = 2 \; , \; d = -3$

$\sqrt{2c - di} = \sqrt{4 + 3i}$

$\sqrt{4 + 3i} = x + yi$

$4 + 3i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 4$ ....(1 , $2xy = 3$ ....(2 , $y = \frac{3}{2x}$ ....(3 in (1)

$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] . x^2 \Rightarrow 4x^4 - 9 = 16x^2 \Rightarrow 4x^4 - 16x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

OR $2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}\right) \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ans : $\sqrt{4 + 3i} = \left\{ \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \right\}$



2007 دور 1

د الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 + 4i$

$\sqrt{3+4i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$3 + 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 3$ ....(1 , $2xy = 4$ ....(2 , $y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$ ....(3 in (1)

$x^2 - (\frac{2}{x})^2 = 3 \Rightarrow [x^2 - \frac{4}{x^2} = 3] . x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$ either $x^2 + 1 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

OR $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = (\frac{2}{\pm 2}) \Rightarrow y = \pm 1$

$\sqrt{3+4i} = \{\pm(2 + i)\}$

2009 دور 2

جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

sol: $\frac{14+2i}{1+i} . \frac{1-i}{1-i} = \frac{14-14i+2i-2i^2}{2} = \frac{16-12i}{2} = 8 - 6i$

$\sqrt{8-6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8 - 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 8$ ....(1 , $2xy = -6$ ....(2 , $y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x}$ ....(3 in (1)

$x^2 - (\frac{-3}{x})^2 = 8 \Rightarrow [x^2 - \frac{9}{x^2} = 8] . x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

OR $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow y = (\frac{-3}{\pm 3}) \Rightarrow y = \mp 1$

ans : $\sqrt{8-6i} = \{\pm(3 - i)\}$

2010 دور 2

جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1 + 7i)(1 + i)$

sol : $(-1 + 7i)(1 + i) = -1 - i + 7i + 7i^2 = -8 + 6i$

$\sqrt{-8+6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8 + 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)\, i$

$x^2 - y^2 = -8$ ....(1 , $2xy = 6$ ....(2 , $y = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x}$ ....(3 in (1)

$x^2 - (\frac{3}{x})^2 = -8 \Rightarrow [\, x^2 - \frac{9}{x^2} = -8\,] \,.\, x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = -8x^2 \Rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 9 = 0$ يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

OR $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = (\frac{3}{\pm 1}) \Rightarrow y = \pm 3$

ans : $\sqrt{-8+6i} = \{ \pm(1 + 3i) \}$

2001 دور 2

جد الجذور التكعيبية للعدد 27 ((تلميح في وقتها لم تكن مبرهنة ديموافر موجودة في المنهج)

sol : let $z = \sqrt[3]{27} \Rightarrow z^3 = 27 \Rightarrow z^3 - 27 = 0$

$(z - 3)(z^2 + 3z + 9) = 0$

$z = 3$ OR $z^2 + 3z + 9 = 0$ a=1 , b=3 , c=9

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-29}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\, i}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow \text{ans} : \{ 3 , \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i , \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \}$$

تلميح \\ اذا لم تحدد طريقة الحل فيمكن للطالب اختيار هذه الطريقة او طريقة ديموافر

2011 دور 1

اذا كان $3 + i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة a وما هو الجذر الآخر .

$$(3+i)^2 - a(3+i) + (5+5i) = 0 \Rightarrow (9 + 6i + i^2) + (5 + 5i) = a\,.(3+i)$$

$$(8 + 6i) + (5 + 5i) = a\,.(3+i) \Rightarrow (13 + 11i) = a\,.(3+i)$$

$$a = \frac{13+11i}{3+i} \Rightarrow a = \frac{13+11i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \Rightarrow a = \frac{(39+11)+(-13+33)i}{10} = 5 + 2i$$

اذا كان $h = 3 + i$ هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الآخر هو K

$$x^2 - (5 + 2i)\,x + (5 + 5i) = 0$$

$$x^2 - (h + k)\,x + hk = 0 \Rightarrow h + K = 5 + 2i$$

$$(3 + i) + K = 5 + 2i \Rightarrow K = (5 + 2i) - (3 + i) \Rightarrow K = (5 + 2i) + (-3 - i) \Rightarrow K = 2 + i$$

نلاحظ ان اي جذر من جذور المعادلة يحقق تلك المعادلة ، ويمكن حل السؤال بالطريقة ادناه حيث يتم المقارنة بالصورة القياسية حيث ان احد الجذرين معلوما نقوم بفرض الجذر الآخر ثم نستخدم اسلوب المقارنة .

الحل بطريقة اخرى \\ اذا كان $h = 3 + i$ هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الآخر هو K

$$x^2 - a\,x + (5 + 5i) = 0$$

$$x^2 - (h + k)\,x + hk = 0$$

عند المقارنة بالصورة القياسية يتضح ان $h\,.\,k = 5 + 5i$, $h + k = a$ وعليه يفضل البدء بالمعلوم والانتهاء بالمجهول .

$$K(3+i) = 5+5i \Rightarrow K = \frac{5+5i}{3+i} \Rightarrow K = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \Rightarrow K = \frac{(15+5)+(-5+15)i}{9+1} = 2 + i$$

$$K + (3 + i) = a \Rightarrow (2 + i) + (3 + i) = a \Rightarrow a = 5 + 2i$$

تنبيه !!! لو كان السؤال بالصورة $x^2 - (5 + 5i)x + a = 0$ بمن سوف تبدأ وبمن تنتهي ؟ جرب بنفسك !!

2014 تمهيدي

ضع في ابسط صورة المقدار $\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}$

sol :
$$\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2} = \frac{[(\cos\theta + i \sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta + i \sin\theta)^5]^2} = \frac{(\cos\theta + i \sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i \sin\theta)^{10}} = 1$$

2013 دور 2 بسط مايأتي $\frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

sol : $\frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3} = \frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^5]^2}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3]^3} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9} = \cos\theta + i\sin\theta$

OR $\frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3} = \frac{(\cos10\theta+i\sin10\theta)}{(\cos9\theta+i\sin9\theta)}$

$=(\cos10\theta + i\sin10\theta) . (\cos9\theta + i\sin9\theta)^{-1} = (\cos10\theta + i\sin10\theta)(\cos9\theta - i\sin9\theta)$

$= [\cos10\theta . \cos9\theta + \sin10\theta . \sin9\theta] + [\sin10\theta . \cos9\theta - \cos10\theta . \sin9\theta]i$

$= \cos(10\theta - 9\theta) + i\sin(10\theta - 9\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

2001 دور 1 ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}\,i}{1+2\sqrt{3}\,i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الاساسية .

sol : $z = \frac{7+\sqrt{3}\,i}{1+2\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}\,i}{1-2\sqrt{3}\,i} = \frac{7-14\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}\,i+6}{1+12} = \frac{13-13\sqrt{3}\,i}{13} = 1 - \sqrt{3}\,i$

Mod z = $||z|| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الرابع

2002 دور 2 اذا كان $z = (-\sqrt{3}, 1)$ عددا مركبا اكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol : $z = -\sqrt{3} + i$

Mod z = $||z|| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ لان السعة تقع بالربع الثاني

2006 دور 2

اذا كان $z=(1+\sqrt{3}\,i)$ عددا مركبا اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol : $z=(1,\sqrt{3})$

$\text{Mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2008 خارج القطر

اذا كان $z=(-1+\sqrt{3}\,i)$ عددا مركبا جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol : $\text{Mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الثاني

2003 دور 2

اذا كان z عددا مركبا مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي (ارجاند) والشكل الجبري له .

sol : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,sn\,\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

2006 دور 1

اذا كان z عدد مركبا مقياسه 4 وسعته $\frac{5\pi}{6}$ جد كلا من الشكل الديكارتي والجبري له .

sol : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,sn\,\frac{5\pi}{6}\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=-2\sqrt{3}+2i=(-2\sqrt{3},2)$

2007 دور 2

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

sol : $\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i-2i^2}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$

sol : $\text{Mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{4}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2008 دور 1

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}\,i)^2$

sol : $z = 1 + 2\sqrt{3}\,i + 3\,i^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعة θ تقع بالربع الثاني $\arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

2008 دور 2

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$

sol : $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{4} = 1+\sqrt{3}\,i$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2011 دور 2

جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

sol : $z = 1 + i \quad \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{||z_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{||z_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z^{11} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{11}$$

$$z^{11} = \left[(\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}\right] = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 32(-1+i) = -32 + 32i$$

2012 دور 1

2013 تمهيدي

باستخدام مبرهنة ديموافر احسب قيمة $(1-i)^7$

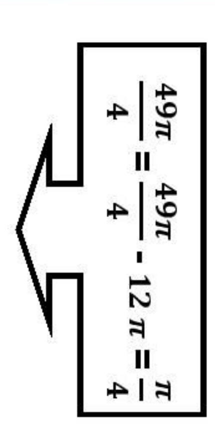
let $z = 1 - i \Rightarrow \text{Mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$\Rightarrow z^7 = [\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})]^7 = (\sqrt{2})^7(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4})$

$= 8\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 8\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 8 + 8i$



2015 دور 1

جد الجذور التكعيبية للعدد $125i$ باستخدام مبرهنة ديموافر

sol : $z = 125i = 125(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{3}} = [125(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})]^{\frac{1}{3}}$

$\because r = 125$, $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$; $k = 0, 1, 2$

if $k=0 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

if $k=1 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}) = 5(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$= 5(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

if $k=2 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}) = 5(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) =$

$= 5(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 5(0 - i) = -5i$

2012 دور 1 — 2013 خارج القطر — 2014 نازحين

عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2\sqrt{3} - 2i$

sol : $Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

θ تقع بالربع الرابع والسعة $\frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد هي $arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

2015

عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2 - 2\sqrt{3}\,i$

sol : $Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

θ تقع بالربع الرابع والسعة $\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد هي $arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

2015 دور 3

اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3 - 3\sqrt{3}\,i$

sol: $Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

تقع بالربع الرابع والسعةθ $\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد هي $arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

2012 تمهيدي

احسب مايأتي $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

sol: $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2013 دور 3

اذا كان $z_2 = 5 + 2i$, $z_1 = 3 + 4i$ وضح على شكل ارجاند $z_1 + z_2$

sol : $z_1=3+4i \Rightarrow p(z_1)=(3,4)$

$z_2=5 + 2i \Rightarrow p(z_2)=(5,2)$

$z_1+z_2= z_3= (3+4i) + (5+2i)$

$= 8 + 6i \Rightarrow p(z_1+z_2)= (8,6)$

p(z_1+z_2) , p(z_1) , p(z_2)

2005 دور 1

حل المعادلة $x^3 + 8i = 0$ في C

sol : $x^3 - 8i^3 = 0 \Rightarrow (x -2i)(x^2 + 2i x + 4i^2) = 0$

$x = 2i$ OR $x^2 + 2i x - 4 = 0$

a=1 , b= 2i , c= - 4

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-2i)\pm\sqrt{(2i)^2-4.1.(-4)}}{2.1}$

$= \frac{-2i\pm\sqrt{-4+16}}{2} = \frac{-2i\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{-2i\pm2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\pm2\sqrt{3}-2i}{2} = \pm\sqrt{3} - i$

ans : $\{ \sqrt{3} - i , -\sqrt{3} - i , 2i \}$

2005 تمهيدي

حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$ في C

sol : $x^3 + 8i^3 = 0 \Rightarrow (x +2i)(x^2 - 2i x + 4i^2) = 0$

$x = -2i$ OR $x^2 - 2i x - 4 = 0$

a=1 , b= -2i , c= - 4

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-2i)\pm\sqrt{(-2i)^2-4.1.(-4)}}{2.1}$

$= \frac{2i\pm\sqrt{-4+16}}{2} = \frac{2i\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2i\pm2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\pm2\sqrt{3}+2i}{2} = \pm\sqrt{3} + i$

ans : $\{ \sqrt{3} + i , -\sqrt{3} + i , -2i \}$

2013 دور 1

اذا كان $z = -2 + 2i$ عبر عن z بالصيغة القطبية

sol : $\text{Mod } z = ||z|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعة θ تقع بالربع الثاني

$\arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2011 خارج القطر

جد الجذور التربيعية للعدد المركب (8 i)

sol : $\sqrt{8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0$ ....(1 , $2xy = 8$ ....(2 , $y = \frac{8}{2x} = \frac{4}{x}$ ....(3 in (1)

$x^2 - (\frac{4}{x})^2 = 0 \Rightarrow [\, x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\,] . x^2 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

OR $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = (\frac{4}{\pm 2}) \Rightarrow y = \pm 2$

ans : $\{ \pm (2 + 2i) \}$

ملاحظة \\ يمكن حل هذا السؤال باستخدام مبرهنة دي موفر $(8i)^{\frac{1}{2}}$

sol : $z = 8i = 8\,(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i \sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$; k = 0 , 1

if k = 0 $\Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 + 2i$

if k=1 $\Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}) = 2\sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2 - 2i$

2013 تمهيدي

جد الجذور التربيعية للعدد المركب (8 i -)

sol : $\sqrt{-8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0$ ....(1 , $2xy = -8$ ....(2 , $y = \frac{-8}{2x} = \frac{-4}{x}$ ....(3 in (1)

$x^2 - (\frac{4}{x})^2 = 0 \Rightarrow [\, x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\,] . x^2 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية) يهمل

OR $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \mp 2$

ans : $\{ \pm (2 - 2i) \}$

ملاحظة \\ يمكن حل هذا السؤال باستخدام مبرهنة دي موفر $(8i)^{\frac{1}{2}}$

sol : $z = -8i = 8\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + i \sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2})$; k = 0 , 1

if k = 0 $\Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2 + 2i$

if k=1 $\Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}) = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 - 2i$

تمهيدي 2015 دور 1
2016 دور 1

باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد المركب (8i)

sol : $z = 8i = 8\ (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$; $k = 0 , 1 , 2$

if $k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$

if $k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\,(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2\,(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$

if $k = 2 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\,(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = 2\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i$

2015 د4

د مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة ديموافر : $x^3 - 8i = 0$

sol : $x^3 = 8i = 8\ (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$x = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$; $k = 0 , 1 , 2$ ثم نكمل بنفس الاسلوب السابق

خارج 2015 دور 1

جد بابسط صورة

a) $(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})^{-3} = (\cos\frac{21\pi}{12} - i\sin\frac{21\pi}{12}) = (\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 . (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

sol : $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 . (\cos\theta - i\sin\theta)^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^8 . (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$

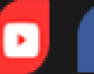
$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

OR $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 . (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 . (\cos\theta + i\sin\theta)^4 . (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 [(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)]^4$

$= (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^4 = (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$



2016 دور 1 خ

اكتب العدد $Z = (1+\sqrt{3}\ i)^2$ بالصيغة القطبية

الطريقة الاولى \\

sol : $C = 1+\sqrt{3}\ i \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\ ,\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$C = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$Z = C^2 = 2^2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^2 = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

الطريقة الثانية \\

$Z = (1+\sqrt{3}\ i)^2 = 1 + 2\sqrt{3}\,i + 3i^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}\ ,\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لان السعة تقع بالربع الثاني $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \theta \Leftarrow$ زاوية الاسناد تساوي $\frac{\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

تقييم \\ على الرغم من ان السؤال غير موجود نصا في الكتاب المنهجي الا ان فكرته منهجية وطريقتي الحل مقبولة وزاريا بصيغتها الحالية وتكون الصيغة الاولى ملزمة للطالب اذا كان المطلوب في السؤال باستخدام مبرهنة ديموافر جد $(1+\sqrt{3}\ i)$ بالصيغة القطبية واذا كانت صيغة السؤال باستخدام مبرهنة ديموافر جد قيمـــــــة $(1+\sqrt{3}\ i)^2$ قيمة من دون ذكر عبارة الصيغة القطبية فيجب تحويل الناتج النهائي الى الصيغة الجبرية كما في ادناه $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

2014 دور 1

جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

sol : $z=\sqrt{3}+i \Rightarrow \text{Mod } z=||z||=r=\sqrt{x^2+y^2}==\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{||z||}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \sin\theta=\frac{y}{||z||}=\frac{1}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$z^{\frac{2}{5}}=(z^2)^{\frac{1}{5}}=[\,2^2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^2\,]^{\frac{1}{5}}=[\,4(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\,]^{\frac{1}{5}}$

$=[\,4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\,]^{\frac{1}{5}}$

$z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5})\quad ; k=0,1,2,3,4$

if k=0 $\Rightarrow z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5})=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15})$

if k=1 $\Rightarrow z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5})=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15})$

if k=2 $\Rightarrow z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5})=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15})$

if k=3 $\Rightarrow z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5})=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15})$

if k=4 $\Rightarrow z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5})=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$

$=\sqrt[5]{4}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$

2014 دور 2

باستخدام مبرهنة ديموافر جد $(\sqrt{3} + i)^{-9}$

2012 خارج القطر

sol : let : $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z^{-9} = [2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]^{-9} = (2)^{-9}(\cos\frac{9\pi}{6} - i\sin\frac{9\pi}{6})$

$= \frac{1}{512}(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{512}(0 + i) = \frac{1}{512} i$

2014 دور 3

جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5 - 5i$

sol : $Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$z = 5\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

2014 خارج القطر

باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1 + \sqrt{3}\, i$

sol : $z = -1 + \sqrt{3}\, i \Rightarrow Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الثاني

$z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = [2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})]^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2})$; $k = 0 , 1$

if $k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i$

if $k=1 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{2}(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i$

2015 دور 2

اذا كان $2-4i$ هو احد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ ، معاملاتها حقيقية ، جد قيمتي $b , c \in R$

الحل \\ بما ان المعاملات حقيقية فان الجذران مترافقان

$h = 2 - 4i \quad , k = 2 + 4i$

$h+k = (2 - 4i) + (2 + 4i) = 4 \quad , \quad h.k = (2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 20$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$x^2 - 4x + 20 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 40 = 0 \quad , 2x^2 - (1 + b)x + (c - 6) = 0$

$1 + b = 8 \Rightarrow b = 7 \quad , \quad c - 6 = 40 \Rightarrow c = 46$



2015 دور 2 خارج

جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1 + i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر .

sol: الطريقة الاولى

$z = 1 + i \quad \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{||z_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{||z_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول

$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \Rightarrow z^2 = [\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\,]^2$

$z^2 = [(\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2\,] = 2\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) \; ; \; k = 0, 1, 2$

$k = 0 \Rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$k = 1 \Rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$k = 2 \Rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}\,(0 - i)$

الطريقة الثانية

$z = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$(z)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\ ;\ k = 0, 1, 2$

$k = 0 \Rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$k = 1 \Rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$k = 2 \Rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}\,(0 - i)$

تلميح \\ لو كانت صيغة السؤال ((باستخدام مبرهنة ديموفر جد $(1+i)^2$ ثم جد الجذور الثلاثة له كانت الطريقة الاولى هي الطريقة الاكثر قبولا اما السؤال في صيغته الحالية فتكون الطريقتين مقبولة .

2016 دور 2 خارج

هل ان : $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 0$ اثبت ذلك .

sol : $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \frac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta + i\sin\theta)^4]^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

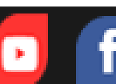
$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^8} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 0$

التقييم \ السؤال منهجي جدا رغم عدم وجوده بهذا النص في الكتاب المقرر الا ان فكرته سهلة نسبيا وبما ان هل الاستفهامية يتحقق الجواب فيها بـ (نعم او كلا) فان ورود كلمة اثبت ذلك في نهاية السؤال تشير الى وجوب اثبات التحقق من عدمه اما اذا وردت كلمة اثبت في بداية السؤال فانها تدل على وجوب تحققها .











حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثاني (القطوع المخروطية)

1997 دور 1
2014 دور 1
2013 دور 2
2016 دور 1 خ

قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(2\sqrt{5}, 1)$, $(2\sqrt{5}, -1)$ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل .

الحل :- في القطع المكافئ بما انه مار بنقطتين تقعان بالربعين الاول والرابع فان بؤرته تقع على الاحداثي السيني الموجب وكلتا النقطتين تحقق معادلته أي ان معادلته $y^2 = 4Px$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 20x \Rightarrow$ بؤرة القطع المكافئ $(5 , 0)$, $20 = 4P \Rightarrow P = 5$

بؤرتي القطع الزائد $(5 , 0)$ $(-5 , 0)$ $\Rightarrow c = 5$, $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

1998 دور 1
2012 دور 2
2015 دور 2

قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمتي كل من h , k الحقيقيتان .

sol : في القطع الناقص $[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$a^2 = 64$, $b^2 = 36$, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = 36 + c^2 \Rightarrow c^2 = 28 \Rightarrow c = \sqrt{28}$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\sqrt{28} , 0),(-\sqrt{28} , 0)$

في القطع الزائد $c = \sqrt{28}$, $2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$

في القطع الزائد $[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$

$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18 = \frac{90}{h} \Rightarrow h = 5$, $b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = 9$

1998 دور 2

قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h, k \in R$

الحل :- في القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x \ , \ y^2 = 4Px \Rightarrow 4P = 4\sqrt{3} \Rightarrow P = \sqrt{3}$

$c = \sqrt{3} \Leftarrow$ بؤرتي القطع الناقص $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Rightarrow [\,4a^2 + 4b^2 = 60\,] \div 4$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \ .... (1$

$a^2 = b^2 + c^2 \ .... (2 \quad \Rightarrow 15 - b^2 = b^2 + 3 \quad \Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 6$

$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$

$[\ hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow 9 = \frac{36}{h} \Rightarrow h = 4 \quad , b^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 6 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = 6$

1997 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ واحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$

الحل \\ في القطع الناقص $a^2 = 36 \ , b^2 = 20 \ , c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 20 = 16 \ \Rightarrow c = 4$

$(\pm 4, 0)$ بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 4 \in$ x-axis

$y^2 + 8x = 0 \ \Rightarrow y^2 = -8x \quad , y^2 = -4px \quad \Rightarrow 4p = 8 \quad \Rightarrow p = 2$

$(-2, 0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احد رأسي القطع الزائد $\Rightarrow a = 2$ في القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \quad \Rightarrow b^2 = 12$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$



1999 دور 1
2010 تمهيدي

النقطة $P(6 , L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 1$ جد كلا من قيمة L ثم جد طولي نصفي قطري البؤرتين المرسومين من تلك النقطة .

sol : أي نقطة تنتمي الى منحني فانها تحقق معادلته

$36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8}$

$P_1(6 , \sqrt{8})$, $P_2(6 , -\sqrt{8}) \in$ القطع الزائد

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 12$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$P_1 F_1$ هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليمنى $\Rightarrow$ البؤرة اليمنى للقطع الزائد $F_1(4 , 0)$

$P_1 F_2$ هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليسرى $\Rightarrow$ البؤرة اليسرى للقطع الزائد $F_2(-4 , 0)$

$P_1 F_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (\sqrt{8}-0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

$P_1 F_2 = \sqrt{(6+4)^2 + (\sqrt{8}-0)^2} = \sqrt{100+8} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ وحدة طول

1999 دور 2

النقطة $(\frac{1}{3} , 2)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص .

sol : $\because (\frac{1}{3}, 2) \in$ Parabola $\Rightarrow$ تحقق معادلته

$y^2 = 4Px \Rightarrow 4 = 4P(\frac{1}{3}) \Rightarrow 12 = 4P \Rightarrow P = 3 \Rightarrow (3 , 0)$ بؤرة القطع المكافئ

$y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ $\Rightarrow (3 , 0) , (-3 , 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{4}$ .... (1

$a^2 = b^2 + c^2$ .... (2 $\Rightarrow (\frac{5b}{4})^2 = b^2 + 9 \Rightarrow [\frac{25b^2}{16} = b^2 + 9] . 16$

$25b^2 = 16b^2 + 144 \Rightarrow 9b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{5}{4} . 4 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

((انتبه ....)) في السؤال السابق اذا كان النسبة بين طولي محوريه $\frac{4}{5}$ فيكون $\frac{2b}{2a} = \frac{4}{5}$.

2000 دور 1
2014 دور 2

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

الحل :- في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x \ , \ y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$

بؤرة القطع المكافئ هي (0 ، 2-) أي ان بؤرتي القطع الناقص هي (0 ، 2) ، (0 ، 2-) أي ان $c = 2$

المعادلة القياسية للقطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$[\ \frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1\ ]\ .\ a^2 b^2 \Rightarrow \quad 12b^2 + 3a^2 = a^2 b^2$ .... (1

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4$ .... (2

$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4)\, b^2 \Rightarrow \quad 12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$

$b^4 + 4b^2 - 12b^2 - 3b^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^4 - 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow b^2 + 1 \neq 0 \quad , \quad b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

2000 دور 2
2013 دور 3
2007 تمهيدي
2008 د2 خارج
2014دور4 انبار
2015 نازحين د1

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{3}$

sol : في القطع الزائد $[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 12 \ , \ b^2 = 4 \rightarrow \ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

القطع الناقص $c = 4 \Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(4, 0), (-4, 0)$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{3}$ ....(1 , $a^2 = b^2 + c^2$ .... (2

$[\frac{25b^2}{9} = b^2 + 16]\ .\ 9 \Rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144 \Rightarrow 16b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$a = \frac{5}{3}\ .\ 3 \Rightarrow a = 5$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2001 دور 1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$

Sol : $3x^2 + 5y^2 = 120 \Rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

$a^2 = 40 \;,\; b^2 = 24 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 40 = 24 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

في ق . ز $c = 4 \in x - axis \Rightarrow$ بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 4 , 0)$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = 4a \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

2001 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = -20x \;,\; y^2 = 20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة .

sol : $y^2 = 20x \;,\; y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$y^2 = -20x \;,\; y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

في القطع الزائد $c = 5 \Rightarrow$ بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 5 ,0)$

either $2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$ ….. (1)

$c^2 = a^2 + b^2$ …. (2)

$25 = (b + 1)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 2b + 1 + b^2 \Rightarrow 2b^2 + 2b - 24 = 0$

$b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow (b+4)(b-3) = 0 \Rightarrow b = 3 \;,\; a = 3 + 1 = 4$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

or $2b - 2a = 2 \Rightarrow b - a = 1 \Rightarrow b = a + 1$ ….. (1)

$c^2 = a^2 + b^2$ …. (2)

$25 = (a + 1)^2 + a^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 2a + 1 + a^2 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 24 = 0$

$a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow (a+4)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3 \;,\; b = 3 + 1 = 4$

معادلة القطع الزائد $\frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

تأكيد !! حرف (و) في اللغة العربية لايفيد الترتيب ففي القطع الزائد يمكن ان يكون المحور الحقيقي اكبر من المحور التخيلي او بالعكس لذا فان الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والتخيلي او الفرق بين طولي محوريه التخيلي والحقيقي لها نفس المعنى وهو الاحتمالان معا الا اذا ارتبط بقرينة كأن يقال ان المحور الحقيقي يزيد على المحور التخيلي بمقدار 4 او يقال ينقص عنه عندها يجب الالتزام بالترتيب .

2002 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة .

sol: $2c = 8 \Rightarrow c = 4 \in$ x- axis

$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b$ .....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$ .....(2)

$(8-b)^2 = b^2 + 16 \Rightarrow 64 - 16b + b^2 = b^2 + 16 \Rightarrow 16b = 48 \Rightarrow b = 3$

$a = 8 - 3 = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2002 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طولي محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

sol : $[x^2 + 9y^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

$(\pm 6 , 0)$ رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 6 \in$ x-axis في القطع الزائد

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 6 = 2a \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ معادلة القطع الزائد

2003 دور 1

قطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول محوريه واحداثيي رأسيه وبؤرتيه .

sol : $[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = 1 + c^2$

$c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$2a = 4$ طول المحور الكبير , $2b = 2$ طول المحور الصغير

$(\pm 2,0)$ رأسي القطع الناقص , $(\pm\sqrt{3} ,0)$ بؤرتي القطع الناقص

2003 دور 2
2009 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

sol : في القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

$a^2 = 49$, $b^2 = 24$ ⇨ $a^2 = b^2 + c^2$ ⇨ $49 = 24 + c^2$ ⇨ $c^2 = 25$ ⇨ $c = 5$

في القطع الزائد $a = 5$ ⇨ بؤرتي القطع الناقص والتي تنتمي الى القطع الزائد $(\pm 5 , 0)$

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4}$ ⇨ $4c = 5b$ ⇨ $c=\frac{5b}{4}$ .... (1)

$c^2 = a^2 + b^2$ ...... (2) ⇨ $[\frac{25b^2}{16}=25+b^2]\,.\,16$

$25b^2 = 400 + 16b^2$ ⇨ $9b^2 = 400$ ⇨ $b^2=\frac{400}{9}$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$

2004 دور 1
2015 دور 2 خارج

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول .

sol : $x^2 = 24y$, $x^2 = 4py$ ⇨ $4p = 24$ ⇨ $p = 6$

⇨ $(0,6)$ بؤرة القطع المكافئ ⇨ $(0,\pm 6)$ بؤرتي القطع الناقص ⇨ $c = 6 \in$ y-axis

$2a - 2b = 4$ ⇨ $a - b = 2$ ⇨ $a = 2 + b$ .....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$ .....(2) ⇨ $(2 + b)^2 = b^2 + 36$ ⇨ $4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$

$4b = 32$ ⇨ $b = 8$ ⇨ $a = 10$

معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$

2006 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 12 وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول .

sol : $2c = 12$ ⇨ $c = 6 \in$ x- axis

$2a - 2b = 4$ ⇨ $a - b = 2$ ⇨ $a = 2 + b$ .....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$ .....(2) ⇨ $(2 + b)^2 = b^2 + 36$ ⇨ $4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$

$4b = 32$ ⇨ $b = 8$ ⇨ $a = 10$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

2004 دور 2
2005 تمهيدي
2006 دور 2
2008 دور 2
2014 دور 3

قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الآخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين .

تلميح \\ كلمة (احدهما) الواردة في السؤال حصل عليها اعتراض لغوي ويمكن استبدالها بكلمة (كل منهما)

الحل :- نلاحظ ان بؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد وراسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

في القطع الناقص $[9x^2 + 25y^2 = 225] \div 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \ , \ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(4 , 0),(-4 , 0)$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(5 , 0) , (-5 , 0)$

في القطع الزائد $a = 4 \ , \ c = 5$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2004 دور 1

جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $(-5 , 0)$ واحد رأسيه $(3 , 0)$

sol: $(-5,0) = (-c,0) \Rightarrow c = 5 \ , \ (3,0) = (a,0) \Rightarrow a = 3$

$\because c > a$ فإن القطع المخروطي هو قطع زائد $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

2004 دور 2

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة $(1 , 4)$ ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة .

الحل \ بما ان النقطة تقع في الربع الاول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات فان معادلته

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px \Rightarrow 16 = 4p \Rightarrow p = 4 \Rightarrow y^2 = 16x$

نقطة التماس $(1 , 4)$, ميل المماس للمنحني $2y\,y' = 16 \Rightarrow y' = \frac{8}{y} \Rightarrow m = \frac{8}{4} = 2$

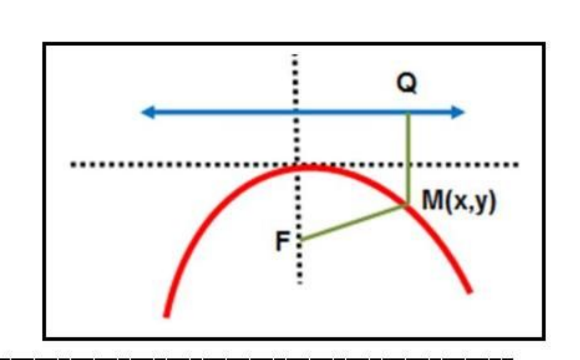
معادلة المماس $(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 4) = 2(x - 1)$

2005 تمهيدي

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $y=\sqrt{3}$

بما ان معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ فان بؤرته $F(0 , -\sqrt{3})$ و $Q(x , \sqrt{3})$

$\overline{QM} = \overline{FM}$



$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x)^2 + (y+\sqrt{3})^2}$$

$y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3$

$x^2 = -4\sqrt{3}\,y$

2005 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 6 وحدات والفرق بين طولي محوريه وحدتا طول .

sol : $2c = 6 \Rightarrow c = 3 \in x - axis$

$2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b$ .....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$ .....(2) $\Rightarrow (1 + b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 1 + 2b + b^2 = b^2 + 9$

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2005 دور 1
2008 دور 1
2015 د4 رسالة

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$, $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق 8 وحدات .

sol : $y^2 = 20x$, $y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$y^2 = -20x$, $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(5,0)$, $(-5,0)$

$2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

2005 دور 2

عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة .

sol : $a^2 = 3$, $b^2 = 1$, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

$F_1(2, 0)$ البؤرة اليمنى للقطع الزائد , let $P(x, y) \in$ للقطع الزائد $\Rightarrow PF_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow [\,x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{3}\,] . 3$

$3x^2 - 12x + 12 + 3y^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 + 3y^2 = 0$ ....(1

$[\,\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1\,] . 3 \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 3 \Rightarrow 3y^2 = x^2 - 3$ ....(2 نعوض 2 في 1

$3x^2 - 12x + 11 + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$

اما $x = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 - 3 \Rightarrow 3y^2 = -2$ يهمل

او $x = 2 \Rightarrow 3y^2 = 4 - 3 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore (2, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(2, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \in$ القطع الزائد

2005 دور 2

لتكن $y^2 - 12x = 0$, $y^2 + 12x = 0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات طول .

sol : $y^2 = 12x$, $y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

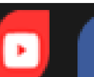
$y^2 = -12x$, $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

معادلة دليليهما $x = -3$, $x = 3$, بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الناقص $(-3,0)$, $(3,0)$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5$

$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 25 \Rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص



2006 تمهيدي
2014 نازحين

لتكن $16x^2 - 9y^2 = 144$ ، جد البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق.

sol : $[16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \;,\; b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$

البؤرتان $F_1(c , 0) , F_2(-c , 0) = (5 , 0) , (-5, 0)$

الرأسان $V_1(a , 0) , V_2(-a , 0) = (3 , 0) , (-3 , 0)$

طول المحور الحقيقي $2a = 6$ ، طول المحور التخيلي $2b = 8$

الإختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

2006 دور 1

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(3 , 6) , (-3 , 6)$ ثم جد معادلة دليله .

الحل \ بما ان النقطتان تقعان بالربعين الاول والثاني في بؤرة القطع المكافئ تقع على المحور الصادي الموجب

$x^2 = 4py \Rightarrow 9 = 24p \Rightarrow p = \frac{3}{8} \Rightarrow f(0 , \frac{3}{8})$ البؤرة , $y = -\frac{3}{8}$ معادلة الدليل

$\Rightarrow x^2 = 4(\frac{3}{8})y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$ معادلة القطع المكافئ

2006 دور 1
2016 دور 2

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

sol : $[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 4 \;,\; b^2 = 32$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

بؤرتا القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(0 , 6) , (0 , -6)$

القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0 \Rightarrow y^2 = -16x \;,\; y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 16 \Rightarrow P = 4$

$x = 4$ معادلة الدليل $\Rightarrow (4 , 0)$ هي نقطة التماس مع القطع الناقص

$b = 4$ في القطع الناقص لان البؤرتاه تقعان على محور الصادات

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{52} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2006 دور 2

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين (3 , 1) , (3- , 1) ثم جد معادلة دليله .

الحل \ بما ان القطع المكافئ يمر بنقطتين تقعان في الربعين الاول والرابع فان بؤرته تقع على محور السينات الموجب

$y^2 = 4px \Rightarrow 9 = 4p \Rightarrow p = \frac{9}{4} \Rightarrow y^2 = 9x$ معادلة القطع المكافئ

$F(p , 0) = (\frac{9}{4} , 0)$ البؤرة , $x = -p \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$ معادلة الدليل

2007 تمهيدي

جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي 4 وحدات .

الحل \ أي نقطة تقع على محور السينات يكون فيها $y = 0$

$y = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$ احدى بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 4$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ معادلة القطع الزائد

2007 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه 8 وحدات ورأساه هما بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

sol : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c=5$

في القطع الناقص $\Rightarrow a= 5$ بؤرتي القطع الزائد وهما رأسي القطع الناقص $(\pm 5,0)$

$2c = 8 \Rightarrow c = 4$, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2007 دور 1

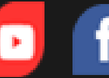
لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جد قيمة k

sol : في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x$, $y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$

$(-2 , 0)$ بؤرة القطع المكافئ $\Rightarrow (2, 0) , (-2 , 0)$ بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 2$

$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 3$, $b^2 = \frac{3}{k}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow [4 = 3 + \frac{3}{k}] \Rightarrow \frac{3}{k} = 1 \Rightarrow k = 3$



2007 خارج القطر

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته نقطة الانقلاب للدالة $f(x)=(x-1)^3$

sol : $f(x) = (x-1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-1)$

نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافئ $6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow (1\,,\,0)$

معادلة القطع المكافئ $p = 1 \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4x$

2007 خارج القطر

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

sol : في القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

هما راسا القطع الناقص وهما بؤرتا القطع الزائد $(10\,,\,0)\,,\,(-10\,,\,0)$

في القطع الزائد $c = 10\ ,\ 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 36 + b^2 \Rightarrow b^2 = 64$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

2015 خارج القطر دور 1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ والمار ببؤرتي القطع الناقص نفسه ثم جد مساحة القطع الناقص

تلميح \\ هذه السؤال يعتبر مرادف للعبارة (كل منهما يمر ببؤرة الآخر) اي ان بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد ويشترك مع السؤال الوزاري اعلاه بالمقطع الثاني من هذا التفسير اما المقطع الاول فنقوم بحساب بؤرتي القطع الناقص عن طريق العلاقة $a^2 = b^2+c^2$ والتي هي نفسها رأسي القطع الزائد وستكون الاجابة النهائية هي ذاتها في السؤال الوزاري اعلاه رغم تغير نمط السؤال ، ويضاف الى الحل حساب مساحة القطع الناقص $A=ab\pi$

2008 تمهيدي

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$.

sol: في القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2 = 25\ ,\ b^2 = 9\ ,\ a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 4\,,\,0)$ $\Rightarrow$ في القطع الزائد $c = 4$ ، $\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

2008 تمهيدي

قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}\ y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6\,,\,3)$ جد قيمة h.

sol: $\frac{1}{4}\ y^2 = hx \Rightarrow y^2 = 4hx$ البؤرة تقع على محور السينات

معادلة الدليل $x = -6 \Rightarrow$ بؤرة القطع المكافئ $f(6\,,\,0) \Rightarrow p = 6$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 24x\ ,\ y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24 \Rightarrow h = 6$

2008 دور 1

قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = K$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة K.

sol : $2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$[\ 4x^2 + 2y^2 = k\ ] \div k \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{k}{2}\ ,\ b^2 = \frac{k}{4}$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow [\ \frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\ ] . 4 \Rightarrow 2k = k + 12 \Rightarrow k = 12$

تذكر انه اذا تساوى بسطي كسرين اعتياديين فان اكبرهما هو الاصغر مقاما

2009 تمهيدي
2001 دور 1
2014 دور 2
2015 دور 1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 12y = 0$.

sol : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ في القطع الناقص $\Rightarrow a^2 = 25\ ,\ b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

بؤرتا القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(0\ ,4)\ ,(\ 0\ ,-4)$

القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0 \Rightarrow x^2 = -12y\ ,\ x^2 = -4Py \Rightarrow 4P = 12 \Rightarrow P = 3$

$y = 3$ معادلة الدليل $\Rightarrow (0\ ,3)$ هي نقطة التماس مع القطع الزائد

$a = 3\ ,\ c = 4$ في القطع الزائد $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ معادلة القطع الزائد

2015 دور 3

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 8y = 0$.

2009 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءا طوله 12 وحدة .

sol : $[9y^2 - 16x^2 = 144\ ] \div 144 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ في القطع الزائد

$a^2 = 16\ ,\ b^2 = 9\ ,\ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل $a = 5$ OR $b = 5 \Leftarrow$ بؤرتي القطع الزائد $(0\ ,5)\ ,(0\ ,-5)$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات = 12 فان

$2a = 12 \Rightarrow a = 6$ OR $2b = 12 \Rightarrow b = 6$

نقوم باخذ احتمال واحد من كل احتمالين لينتج $a = 6\ ,\ b = 5$

بما ان القطبين يقعان على محور الصادات فان البؤرتين والرأسين يقعان على محور السينات

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

2010 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال طول محوره الصغير .

sol : $y^2 = -8x$, $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow (-2,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(\pm 2 , 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 2 \in$ x- axis

$2a = 3(2b) \Rightarrow a = 3b$ .... (1)

$a^2 = b^2 + c^2$ .... (2)

$9b^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 8b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

2010 دور1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2-16x= 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة .

sol: $y^2 = 16x$, $y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow (4,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(4,0) \in$ القطع الناقص $\Rightarrow$ either $a = 4$ OR $b = 4$

$ab\pi = 20\pi \Rightarrow ab = 20$

if $a = 4 \Rightarrow 4b = 20 \Rightarrow b = 5$ تهمل

if $b = 4 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$

بما ان القطب يقع على محور السينات فان البؤرتين والرأسين على محور الصادات

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2010 دور2

اذا كانت $Ky^2 + 3x^2 = Z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\,\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي K , Z

sol : if $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow (0 , \sqrt{3}) \in$ ElliPse

$b = \sqrt{3}$ لأن البؤرة تقع على محور السينات

$2\sqrt{3}\,\pi = a\,b\,\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\,\pi = \sqrt{3}\,a\,\pi \Rightarrow a = 2$

$[\,Ky^2 + 3x^2 = Z\,] \div Z \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{z}{k}} + \frac{x^2}{\frac{z}{3}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{z}{3}$, $b^2 = \frac{z}{k}$

$4 = \frac{z}{3} \Rightarrow Z = 12$, $3 = \frac{z}{k} \Rightarrow 3 = \frac{12}{k} \Rightarrow K = 4$

2011 دور 1

جد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ المار بالنقطة (2,1)

تلميح \\ السؤال نفسه سؤال تمارين القطع المكافئ وتم عكس احداثي النقطة .

الحل \ اي نقطة تنتمي الى القطع المكافئ تحقق معادلته

$Ax^2 + 8y = 0 \Rightarrow 4A + 8 = 0 \Rightarrow 4A = -8 \Rightarrow A = -2$

$-2x^2 = -8y \Rightarrow x^2 = 4y \quad , \quad x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$f(0, p) = (0, 1)$ بؤرة القطع المكافئ , $y = -p \Rightarrow y = -1$ معادلة الدليل

2011 دور 2
2015 دـ4 رسالة

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة .

مساحة القطع الناقص $A = ab\pi = 7\pi \Rightarrow ab = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{b}$ ...... (1

محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 10\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 5 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} = 25$

$a^2 + b^2 = 50$ .... (2

$\frac{49}{b^2} + b^2 = 50 \Rightarrow 49 + b^4 = 50b^2 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$

اما $b^2 = 49 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{7} = 1$ يهمل

او $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 7$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

2011 خارج

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) وبؤرتاه تقعان على محور السينات .

sol : $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ معادلة القطع الزائد

2012 خارج

قطع ناقص رأساه (0 , 5 ±) واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والمار دليله بالنقطة (4 , 3-) جد معادلة القطعين المكافئ والناقص .

الحل \ بما ان رأسي القطع الناقص يقعان على محور السينات فإن بؤرتيه يقعان على محور السينات ايضا اي ان بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات كذلك .

ولأن دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (4 , 3 -) فإن معادلة الدليل $x = -3$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 12x \Rightarrow p = 3$ بؤرة القطع المكافئ $F(3 , 0)$

$\Rightarrow c = 3$ بؤرتي القطع الناقص $(\pm 3 , 0)$

$\Rightarrow a = 5$ رأسي القطع الناقص $(\pm 5 , 0)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2013 خارج

جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه كنسبة 1:2 ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

الحل :- في القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$ فان

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (2 , 4) , (2 , -4) \in$ ElliPse

في القطع الناقص $\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2}$ $2a = 2(2b) \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b$ .... (1

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2\sqrt{17}$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

> تأكيد \\ لو ان البؤرتان على محور الصادات لكانت المعادلة $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{32} = 1$

2013 خارج

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 5y^2 = 45$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق .

sol : في القطع الناقص $[9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 9 \;,\; b^2 = 5 \;,\; c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2 \in$ y-axis

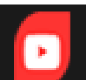
القطع الزائد $\in$ $\Rightarrow a = 2$ بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(0 , \pm 2)$

$2c = 2(2b) \Rightarrow c = 2b$ .....(1)

$c^2 = a^2 + b^2$ .... (2)

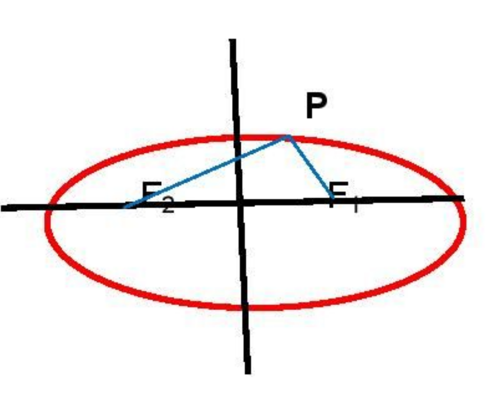
$4b^2 = 4 + b^2 \Rightarrow 3b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$



2014 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1,F_2(\mp 4 , 0)$ والنقطة P تنتمي اليه بحيث ان محيط المثلث PF_1F_2 يساوي 24 وحدة ؟



sol : $(4 , 0) = (c , 0) \Rightarrow c = 4$

$PF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 24$

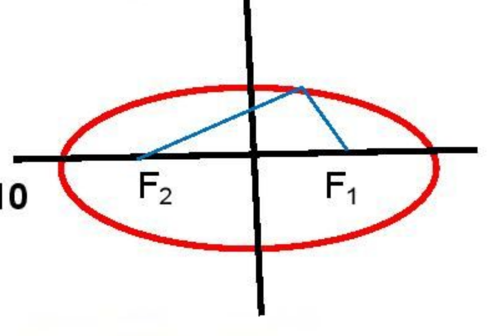
$2a + 2c = 24 \Rightarrow 2a + 8 = 24 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ معادلة القطع الناقص

2016 دور 2 خارج

جد معادلة القطع الذي بؤرتاه $(\pm 5 , 0)$ والنقطة Q تنتمي اليه بحيث ان المثلث QF_1F_2 محيطه يساوي 30 وحدة طول .



sol : $(5 , 0) = (c , 0) \Rightarrow c = 5$

$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 30$

$2a + 2c = 30 \Rightarrow 2a + 10 = 30 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 25 \Rightarrow b^2 = 75$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$ معادلة القطع الناقص

2012 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

الحل :- في القطع المكافئ $x^2 = 24y$, $x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = 24 \Rightarrow P = 6$

بؤرتي القطع الناقص $(0 , 6) , (0 , -6) \Rightarrow c = 6$

في القطع الناقص $2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b$ ...... (1

$a^2 = b^2 + c^2$ .... (2

$(18 - b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 324 - 36b + b^2 = b^2 + 36$

$36b = 324 - 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 18 - 8 \Rightarrow a = 10$

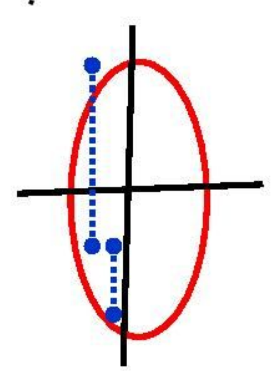
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص



2014 تارجين

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 على الترتيب وبؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل.

sol : بما ان موقع البؤرة غير معلوم فيجب اخذ الاحتمالان معا



$2a = 1 + 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$2c = 5 - 1 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

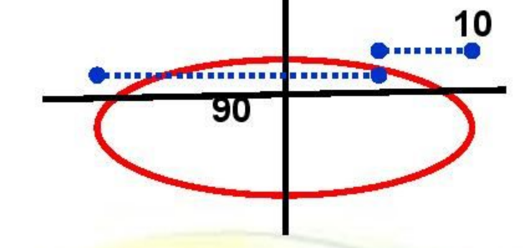
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$

or $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص

2016 دور 2 خارج

يدور القمر حل الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين . تقع الارض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطل مسافة بين الارض والقمر 90Km واقصر مسافة بينهما 10km جد الاختلاف المركزي للقطع

sol :



$2a = 90 + 10 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$

$2c = 90 - 10 \Rightarrow 2c = 80 \Rightarrow c = 40$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

التقييم \ فكرة السؤال منهجية ولكن واضع السؤال قد اخفق في تقدير المسافة المنطقية بين الارض والقمر واوقع نفسه في اشكال منطقي رغم ذلك يعد السؤال من الاسئلة السهلة نسبيا .

2012 دور 2

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة ؟

sol: $A = ab\pi \Rightarrow 24\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 24$

الجزء المقطوع من محور السينات يمثل (اما المحور الكبير 2a) او (المحور الصغير 2b)

if $2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6$ تهمل

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow a = 6$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات يمثل المحور الصغير فان البؤرتين والرأسين يقعان على محور الصادات اي ان معادلة القطع الناقص هي

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$$

2012 دور 1

عين البؤرة والرأس ومعادلتي كل من الدليل والمحور للقطع المكافئ $y^2 + 4y + 2x = -6$

sol : $y^2 + 4y + 2x = -6 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = -2x - 2$

$(y + 2)^2 = -2(x + 1)$, $(y - k)^2 = -4p(x - h) \Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$F(h-p , k) = F(-\frac{3}{2} , -2)$ البؤرة , $V(h , k) = (-1 , -2)$ الرأس

$x = h+p \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ معادلة الدليل , $y = k \Rightarrow y = -2$ معادلة المحور

2014 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات .

sol: $y^2 = 12x$, $y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow (3 , 0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(\pm 3 , 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3 \in$ x-axis

$2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2014 دور 4 انبار

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2-2y^2 = 6$

sol : $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6 \Rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 6 , \; b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

في القطع الناقص $c = 3 \Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(3 , 0) , (-3 , 0)$

$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b$ ....(1 , $a^2 = b^2 + c^2$ .... (2

$(8 - b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 64 - 16b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 16b = 55 \Rightarrow b = \frac{55}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{3025}{256}$

$a^2 = \frac{3025}{256} + 9 = \frac{5329}{256}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{256x^2}{5329} + \frac{256y^2}{3025} = 1$ معادلة القطع الناقص

عزيزي الطالب من المحتمل ان مجموع طولي محوري القطع الناقص هي 18 بدلاً من 16 وهناك خطأ مطبعي في السؤال ليكون الجواب هو

sol : $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6 \Rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 6 , \; b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

في القطع الناقص $c = 3 \Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(3 , 0) , (-3 , 0)$

$2a + 2b = 18 \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b$ ....(1 , $a^2 = b^2 + c^2$ .... (2

$(9 - b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 72 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$a^2 = 16 + 9 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2014 دور 4 انبار

اذا كانت $e+id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه $(0 , d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\| e + id \|$

sol : $e+id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i \Rightarrow e = 1 , d = 3$

$2\| e + id \| = 2\| 1 + 3i \| = 2\sqrt{1+9} = 2\sqrt{10}$

$(0 , d) = (0 , 3)$ احدى بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3$

$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 1$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

2014 تمهيدي

جسر على شكل نصف قطع ناقص ، المسافة بين نهايتي قاعدته (24 m) وارتفاعه (9 m) جد ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد عن بدايته (6 m)

الحل \ نفرض ان مركز الجسر هو نقطة الاصل فيكون طول الجسر الافقي هو المحور الكبير للقطع الناقص وارتفاعه هو نصف المحور الصغير $2a = 24 \Rightarrow a = 12 \quad , \quad b = 9$

وعلى اعتبار ان اي نقطة تقع على القطع الناقص تحقق معادلته فان النقطة التي تبعد عن بداية الجسر 6 متر هي النقطة التي تبعد عن نقطة الاصل 6 متر ايضا اي ان احداثيها السيني يساوي 6 والمطلوب الارتفاع الذي يمثل الاحداثي الصادي للنقطة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{144}+\frac{y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{81}=1-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{81}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{243}{4} \Rightarrow y=\frac{9\sqrt{3}}{2}\ m$$

2014 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص والزائد اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على المحور السيني وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}\ m$ وطول المحور الحقيقي يساوي 6m

الحل \ في القطع الناقص $2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

في القطع الزائد $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ وبما انهما كل منهما يمر ببؤرتي الآخر فان راسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد وبؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد وعليه فأن

في القطع الناقص $a = 3\sqrt{2}\ ,\ c = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

في القطع الزائد $c = 3\sqrt{2}\ ,\ a = 3 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$

2014 خارج

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$.

الحل :- في المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ عن $x = 0$ فان

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (0, 4), (0, -4)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 4$

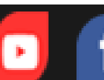
في القطع المكافئ $y^2 = 12x\ ,\ y^2 = 4Px \Rightarrow 4P = 12 \Rightarrow P = 3$

معادلة الدليل $x = -3 \Rightarrow (-3, 0)$ نقطة التماس $\in$ القطع الناقص

لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات والنقطة تقع على محور السينات $b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25$

معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$



2014 دور 4 انبار

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (0 , 6 ±) ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$ ومركزه نقطة الاصل .

sol : $c = 6$, $a = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$$ معادلة القطع الزائد

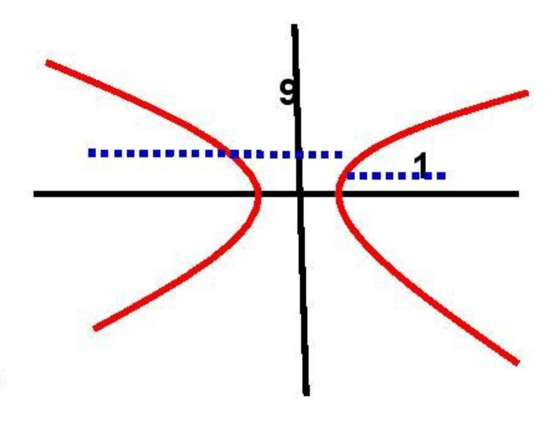
2015 تمهيدي

اكتب المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 ، 1 على الترتيب اذا علمت ان محوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين .

sol : $2c = 1 + 9 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$2a = 9 - 1 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$



اما $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

او $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

ملاحظة (**منهجية**) اذا كانت احد رأسي قطع زائد يبعد عن البؤرتين بعددين فان مجموعهما يمثل 2c وفرقهما الموجب يمثل 2a .

ملاحظة (**غير منهجية**) حاصل ضرب بعدي الراس في القطع الزائد عن البؤرتين يساوي b^2

2015 دور1

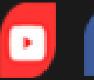
جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه النقطتان (0 , 5 ±) وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة .

sol: $c = 5 \in x\text{-axis}$, $2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 25 \Rightarrow b^2 = 11$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$ معادلة القطع الناقص

التقييم \\ سؤال سهل جدا جدا واعتقد ان ماكان مقدر له ان يكون باستخدام التعريف وقد تم تخفيف السؤال على الطالب بشكل كبير علما ان الطالب الذي استخدم التعريف في حله يعطى درجة كاملة .



2015 دور 2

ليكن $5y^2 - 4x^2 = k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $4y - \sqrt{5}\,x^2 = 0$ جد قيمة k .

sol : $4y - \sqrt{5}\,x^2 = 0 \Rightarrow 4y = \sqrt{5}\,x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}y \;,\; x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$(0 , \frac{1}{\sqrt{5}})$ بؤرة القطع المكافئ ⇐ $(0 , \frac{1}{\sqrt{5}}) , (0 , -\frac{1}{\sqrt{5}})$ بؤرتي القطع الزائد ⇐ $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$[5y^2 - 4x^2 = k\ ] \div k \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{k}{5}} - \frac{x^2}{\frac{k}{4}} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = \frac{k}{5} \;,\; b^2 = \frac{k}{4}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow [\frac{1}{5} = \frac{k}{5} + \frac{k}{4}] . 20 \Rightarrow 4 = 4k + 5k \Rightarrow 9k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{9}$

2015 دور 2

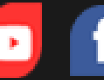
جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ومساحته 32π وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة 1/2

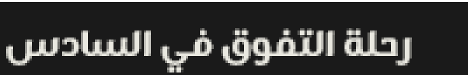
sol: $\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$ .....(1)

$a\,b\,\pi = 32\,\pi \Rightarrow 2b^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 8$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص







2016 دور 1 خ

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (4 , 3) , (6 , 2) .

الحل:- المعادلة القياسية للقطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\left[\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\right].a^2b^2 \Rightarrow 16b^2+9a^2=a^2b^2$ .... (1

$\left[\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\right].a^2b^2 \Rightarrow 36b+4a^2=a^2b^2$ .... (2

اذا تساوى الطرف الايمن في اي معادلتين تساوى فيهما الطرف الايسر $36b+4a^2=16b^2+9a^2$

$20b^2=5a^2 \Rightarrow a^2=4b^2$ ...... (3) in (1)

$16b^2+36b^2=4b^4 \Rightarrow [52b^2=4b^4]\div b^2 \Rightarrow b^2=13$ in (3) $\Rightarrow a^2=52$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$

تقييم السؤال \\ السؤال منهجي جدا وهو موجود في الكتاب المنهجي وتم استبدال النقطة (4, 3) في الكتاب المنهجي الى النقطة (3 , 4) في هذا السؤال مع الابقاء على النقطة (6 , 2) على حالها وبذلك سوف تتغير معادلة القطع الناقص علما ان المعادلة النهائية في الكتاب المنهجي هي $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$

تلميح \\ القسمة على b^2 في هذا السؤال جائزة ولكنها غير جائزة بشكل مطلق ويجب ان تعلم انه لايجوز القسمة على متغير الا بعد التأكد انه لايساوي صفر وفي هذا السؤال نحن متأكدون ان b^2 لايمكن ان تساوي صفر.

2016 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $y^2 + 24x = 0$ اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi\ cm^2$

sol : $y^2 + 24x = 0 \Rightarrow y^2 = -24x$, $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = 6$ في القطع المكافئ

$2p = 12$ تمثل المسافة بين بؤرة القطع المكافئ المعطى ودليله

$2c = 2p \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$ في القطع الناقص

$ab\pi = 80\pi \Rightarrow ab = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{b}$ في القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (\frac{80}{b})^2 = b^2 + 36 \Rightarrow [\frac{6400}{b^2} = b^2 + 36].b^2$

$6400 = b^4 + 36b^2 \Rightarrow b^4 + 36b^2 - 6400 = 0$

$(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 10$

بما انه لم يذكر موقع بؤرة القطع الناقص فأن المعادلة يمكن ان تكون بكلا الاحتمالين

either $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

OR $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

تأكيد \\ ان وجود معادلة سينية للقطع المكافئ لاتعني ان بؤرة القطع الناقص تقع على محورالسينات لان وصف البعد في السؤال يشير الى قيمة عددية للبعد بين البؤرتين وليس موقعهما . اما لفظ البعد البؤري فهو لفظ غير وارد في المنهج العراقي وغير وارد في كل الاسئلة الوزارية السابقة ويمكن ان يشير الى قيمة c فقط وفي هذا السؤال كان المقصود هو 2c وفي المنطق الرياضي يكون اي تعبير لفظي له اكثر من دلالة واحدة يشير الى خلل واضح في اعداد السؤال وهذا مالايجب حدوثه في الاسئلة الوزارية .

السؤال منهجي بالرغم من عدم وجوده نصا في الكتاب المقرر وصيغته ركيكة بعض الشئ فيجب ان يقال ان

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi\ cm^2$.

2016 دور 1

جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول .

الحل \ بما ان القطعان الزائد والناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر فإن بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد .

في القطع الناقص $2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

في القطع الزائد $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$(\pm3\sqrt{2}, 0)$ هما رأسي القطع الناقص , $(\pm 3, 0)$ هما بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

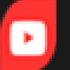
معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

$(\pm3\sqrt{2}, 0)$ هما بؤرتي القطع الزائد , $(\pm 3, 0)$ هما رأسي القطع الزائد $\Rightarrow a = 3$

$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

السؤال منهجي بالرغم من عدم وجوده نصا في الكتاب المقرر على الرغم من ان لغة السؤال ركيكة بعض الشئ وينقصه ان يذكر فيه ان القطعان مركزيهما نقطة الاصل .



2016 تمهيدي

جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة (2 , 0)

الحل \ بما ان الاختلاف المركزي اكبر من (1) فان القطع المخروطي هو قطعا زائدا

اذا مر القطع الزائد بنقطة تقع على احد المحورين وكان مركزه نقطة الاصل فانها تمثل الرأس حتما

$a = 2 \quad , \frac{c}{a} = 3 \quad \Rightarrow c = 3a \quad \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow 36 = 4 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 32$

بما ان الرأس يقع على محور الصادات فان المعادلة $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$

2016 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 16y = 0$ وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة .

الحل :- في القطع المكافئ $x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = 16y \;, x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = 16 \Rightarrow P = 4$

بؤرة القطع المكافئ هي (4 , 0) أي ان بؤرتي القطع الناقص هي (4 , 0) ،(4- , 0) أي ان $c = 4$

في القطع الناقص $2a = 12 \Rightarrow a = 6 \quad , c = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20$

معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$

مثال الكتاب\جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

2014 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات .

حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثالث (المسائل المرتبطة بالزمن)

1996 دور 1

جد نقطة او اكثر تنتمي الى الدائرة $x^2 + y^2 - 4x = 4$ عندما يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساويا الى معدل تغير y بالنسبة للزمن .

sol : let M (x , y) ; $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$x^2 + y^2 - 4x = 4$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = 0$

$2x\frac{dx}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = -2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow (2x - 4)\frac{dx}{dt} = (-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow [(2x - 4) = (-2y)] \div 2 \Rightarrow x - 2 = -y \Rightarrow y = 2 - x$ ……. (1

$x^2 + y^2 - 4x = 4$ …….. (2

$x^2 + (2 - x)^2 - 4x - 4 = 0$

$x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x - 4 = 0$

$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$ OR $x = 4 \Rightarrow y = 2 - 4 = -2$

$M = \{(0 , 2) , (4 , -2)\}$

1997 دور 1

سيارة تسير بسرعة 30 m/s اجتازت اشارة مرورية حمراء ارتفاعها 3 m عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ اصطدمت بسيارة اخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية .

تلميح \\ هذا السؤال لكي يكون منطقيا يجب ان تكون الاشارة المرورية معلقة والسيارة تمر من تحتها مباشرة وفي غير هذه الحالة اي انه ان كانت الاشارة تقع اعلى عمود متستقر على الارض عندها يجب ان يكون العمود على الرصيف وليس في وسط الشارع والا اصطدمت السيارة به .

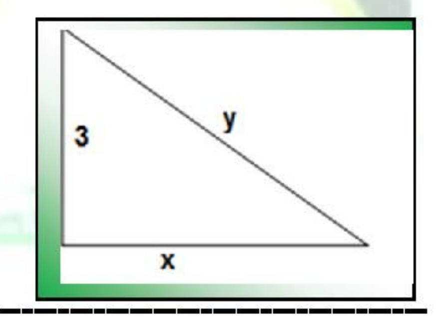
الحل \\ نفرض ان بعد السيارة عن مسقط الاشارة المرورية على الارض x ونفرض ان بعدها عن الاشارة y

$y^2 = x^2 + 9$

$y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 27 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$

$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3\sqrt{2}(30)}{3\sqrt{3}} = 10\sqrt{6}\ m/s$



2010 تمهيدي

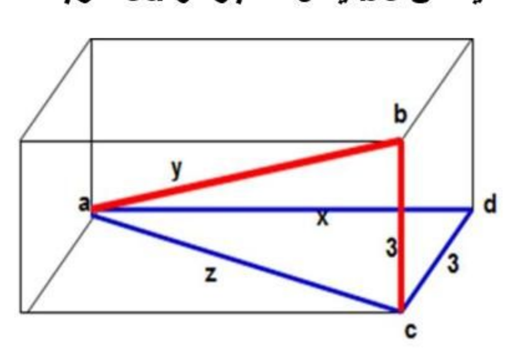
قطار ذو عربة واحدة يسير بسرعة (30 m /s) اجتازت شجرة ارتفاعها 3 m عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ توقف نتيجة وجود عمل ارهابي على السكة احسب سرعة تغير المسافة بين القطار وقمة الشجرة ؟

تلميح \\ هذا السؤال فيه اشكال كبير من حيث المنطوق لان الشجرة لايمكن ان تكون على السكة مباشرة ولايمكن تفسير الشجرة على انها معلقة كما في تفسير سؤال الاشارة المرورية لذا فان السؤال على وضعه الحالي فيه اشكال كبير ولايمكن ان يكرر في الامتحان الا بعد ادخال التعديل ادناه عليه ليكون سؤالا ليس بسهل

التعديل المقترح ((ان اقرب مسافة بين الشجرة والسكة هي 3 متر)) ، ((كما سنفترض انه يبتعد عن قمتها))

وسيصبح الحل بالشكل ادناه :-

الحل \\ في المثلث acb القائم الزاوية في c نفرض ان ab = y والذي يمثل قطر متوازي المستطيلات حيث ان bc يمثل الشجرة و cd اقرب مسافة بين قاعدة الشجرة والسكة



$y^2 = z^2 + 9$

[$y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 27 = z^2 + 9 \Rightarrow z^2 = 18 \Rightarrow z = 3\sqrt{2}$

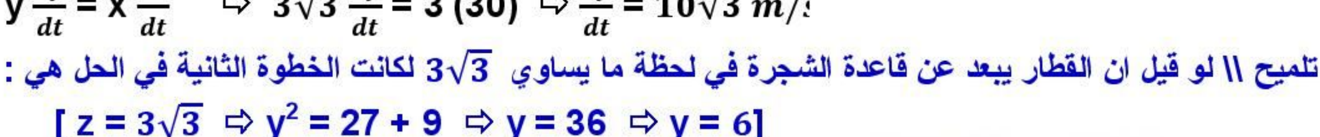
$2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt}$ .... (1)

ي المثلث adc القائم الزاوية في d نفرض ان ad=x , ac = z

$z^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 18 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

عوض 1 في 2 $\quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt}$ .... (2)

$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\,(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 10\sqrt{3}\ m/s$



تلميح \\ لو قيل ان القطار يبعد عن قاعدة الشجرة في لحظة ما يساوي $3\sqrt{3}$ لكانت الخطوة الثانية في الحل هي :

[$z = 3\sqrt{3} \Rightarrow y^2 = 27 + 9 \Rightarrow y = 36 \Rightarrow y = 6$]

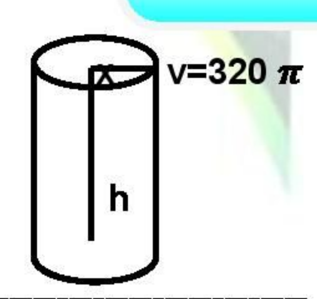
2000 دور 2
2003 دور2
2006 تمهيدي

اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل 0.5 cm/s بحيث يظل حجمها دائما مساويا $320\ \pi\ cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها عندما يكون ارتفاعها 5 cm

الحل \\ نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = x ، ارتفاعها = h ، حجمها

$V = \pi x^2 h \Rightarrow 320\pi = \pi x^2 h \Rightarrow 320 = x^2 h$

تعوض بعد الاشتقاق [$h = 5 \Rightarrow 320 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$]



$0 = x^2\frac{dh}{dt} + h \cdot 2x\frac{dx}{dt}$

$0 = 64(0.5) + 5(16)\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.4\ cm/s$

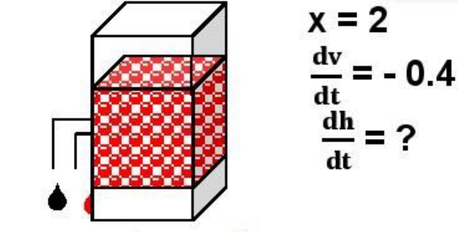
اي ان معدل نقصان نصف القطر يساوي 0.4cm/s

2011 دور 1
2013 دور 2

خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيله قاعدته مربعة طولها 2 m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\ m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في أي زمن t .

sol : let V = حجم متوازي المستطيلات , X = طول ضلع القاعدة المربعة , h = ارتفاع

$V = X^2 h$



$x = 2$

$\frac{dv}{dt} = -0.4$

$\frac{dh}{dt} = ?$

$X = 2\ m \Rightarrow V = 4h$

$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow -0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$

$\frac{dh}{dt} = 0.1\ m/h$ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان

تذكير \\ الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم يعوض بعد الاشتقاق واحيانا يعوض قبل الاشتقاق لايجاد قيمة متغير دائم آخر ليتم تعويضهما معا بعد الاشتقاق

2004 دور 1

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كـــان معدل نقصان نصـف قطره $(\frac{7}{22}cm/s)$ بحيث يبقى محافظا على شكله فعندما يكون نصف قطره 10 cm جد :

1) معدل نقصان حجمه ، 2) معدل نقصان مساحته السطحية

الحل \ نفرض ان نصف قطر الكرة r وحجمها v ومساحتها السطحية A

$v = \frac{4\pi}{3}r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\frac{22}{7}(100)\frac{-7}{22} = -400\ cm^3/s$

اي ان معدل نقصان الحجم يساوي $400\ cm^3/s$

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\frac{22}{7}(10)\frac{-7}{22} = -80\ cm^2/s$

اي ان معدل نقصان المساحة السطحية تساوي $80\ cm^2/s$

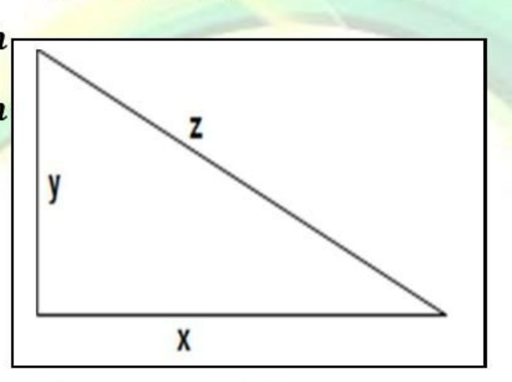
2009 دور 1

طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة 80 km/h وتسير سيارة على الطريق الاخر بسرعة 60 km/h جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة .

الحل\ نفرض ان الطريقان المتعامدان x , y والبعد بين السيارتين z

$\because \frac{dx}{dt} = 80 \Rightarrow x = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20$ after $\frac{1}{4}h$

$\because \frac{dy}{dt} = 60 \Rightarrow y = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15$ after $\frac{1}{4}h$



$z^2 = x^2 + y^2$

$z^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow z = 25$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$25\frac{dz}{dt} = (80)(20) + (60)(15)$

$25\frac{dz}{dt} = 2500 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 100\ km/h$

2008 دور 2

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره (200π) احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل النقصان في مساحته السطحية $80m^2/s$.

الحل \\ نفرض ان حجم البالون = V ، ومساحته السطحية = A ، ونصف قطره = r

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d2r}{dt}} = 200\pi \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 200\pi \frac{d2r}{dt}$$

$$\frac{d2r}{dt} = 2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \quad ...... (1)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad ...... (2)$$

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$$

نلاحظ ان مشتقة قانون حجم الكرة تم الاستفادة منها مرتين ، مرة من خلال المعلومة المعطاة في السؤال ومرة اخرى من خلال اشتقاق قانون الحجم ومن خلال تساوي المعادلتين 1 مع 2 نستنتج قيمة r

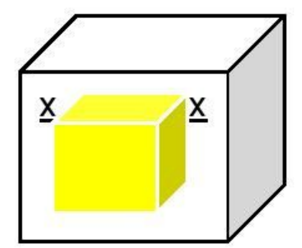
$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$-80 = 80\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{\pi}$$ تعوض اما في (1) او في (2)

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi . \frac{-1}{\pi} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -400\ m^3/s$$ معدل تغير الحجم ⇨ $400\ cm^3/s$ معدل نقصانه

2011 خارج القطر
2014 خارج القطر

مكعب صلد طول حرفه 8 m مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا ، فاذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6\ m^3/s$ فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1 m .



الحل :- نفرض ان سمك الجليد = x ، حجم المكعب = (طول الضلع)^3

طول ضلع المكعب الصغير = 8 ⟸ $v_1 = (8)^3$

طول ضلع المكعب الكبير = (8 + 2x) ⟸ $v_2 = (8+2x)^3$

$$v = v_2 - v_1 \Rightarrow v = (8+2x)^3 - (8)^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2 .(2)\frac{dx}{dt} + 0 \Rightarrow -6 = 3(8+2)^2 .(2)\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100}\ m/s$$

$\frac{dx}{dt} = -0,01\ m/s$ معدل تغير سمك الجليد OR $\frac{dx}{dt} = 0,01\ m/s$ معدل نقصان سمك الجليد

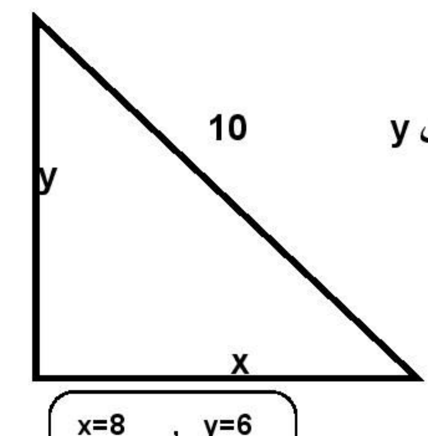
ملاحظة\ اذا ما عبَرنا عن الناتج بمعدل النقصان فيكتب موجبا لأن الاشارة السالبة استعضنا عنها بوصف النقصان.

2012 دور 1
2014 دور 2
2014 تمهيدي

سلم طوله 10m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/sec عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m من الحائط جد :

1) معدل انزلاق طرفه العلوي .

2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض .



$x=8 \quad , \quad y=6$

$\frac{dx}{dt} = +2 \ , \ \frac{dy}{dt} =$

الحل :- (1) نفرض بعد قاعدة السلم عن الحائط x ، بعد رأس السلم عن الارض y

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$(2)(8)(2) + (2)(6)\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/sec}$$

أي ان معدل انزلاق الطرف العلوي $\frac{8}{3}$ m/sec

(2) نفرض ان الزاوية بين السلم والارض = θ

$$\sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{10}y$$

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt} \quad , \because \cos\theta = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3} \text{ rad / sec}$$ معدل تغير الزاوية بين السلم والارض

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3} \text{ rad / sec}$$ سرعة نقصان الزاوية بين السلم والارض

تنبيه \\ السؤال ورد في اربع نماذج وزارية ولكن احيانا يكون مطلب واحد وهو الاول واحيانا يكون مطلبين معا .

ملاحظة مهمة \\\ يمكن استخدام العلاقة في المطلب الثاني أي دالة نشاء سواء كانت $\cos\theta = \frac{x}{10}$ او $\tan\theta = \frac{y}{x}$ فنحصل على نفس الاجابة (جرب ذلك)

2009 دور 2

سلم طوله 13m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل 4 m/sec جد معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم في اللحظة التي يكون فيها الطرف الاسفل للسلم على بعد 5 m من الحائط

الحل يكون بنفس اسلوب السؤال اعلاه مع مراعاة تغيير اعداد السؤال والجواب ان معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم يساوي $\frac{5}{3}m/s$ مع التأكيد على ان الناتج النهائي سيكون سالبا وتم الاستعاضة عنه بكلمة انزلاق .

2011 دور 2
2014 دور 3
2015 نازحين د1

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل 2cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8 cm .

sol : let A = مساحةالمستطيل , X = طول المستطيل , y= عرض المستطيل

$\frac{dx}{dt} = 2 \ , \frac{dy}{dt} = ?$

A = 96 (ثابت)

x = ? , y = 8

$A = X\, y$

$96 = 8X \Rightarrow X = 12$

$0 = X \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$

$0 = 12 \frac{dy}{dt} + (8)(2) \Rightarrow 12 \frac{dy}{dt} = -16 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}\ cm/s$

اي ان العرض يتناقص بمعدل $\frac{4}{3}$ cm/s في تلك اللحظة

2016 دور1خ

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد عرضها بمعدل 2cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل التغير في الطول وذلك عندما يكون طولها 12 cm .

اختلاف بسيط في الارقام عن سؤال الكتاب والاسئلة الوزارية لثلاث سنوات متفرقة كما في ادناه مع التأكيد على ان الناتج السالب $\frac{dx}{dt} = -3$ يمثل معدل تغير طول المستطيل وينتهي السؤال به واذا طلب معدل التناقص فتستبدل الاشارة السالبة بكلمة نقصان .

عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعدا عن العمود وبسرعة 30 m/min جد معدل تغير طول ظل الرجل .

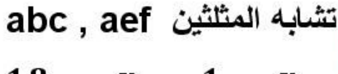
الحل :- نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = x ، نفرض ان طول ظل الرجل = y

2012 تمهيدي
2013 دور 1
2014 تمهيدي خ
2015 تمهيدي
2015 دور 1

$\frac{dx}{dt} = 30 , \frac{dy}{dt} = ?$

c
7.2
1.8
a
e x b y

تشابه المثلثين abc , aef



$\frac{1.8}{7.2} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$

$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$

$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = (\frac{30}{3})$

$\frac{dy}{dt} = 10$ m/min

ملاحظة \\ كلما يبتعد الرجل عن مصدر النور يزداد ظله والعكس صحيح

تأكيد \\ لو طلب في هذا السؤال معدل تغير طول ظل رأس الرجل بالنسبة للقاعدة نفرض البعد بين ظل رأس الرجل والقاعدة y والبعد بين قدم الرجل والقاعدة x عندها سيكون البعد بين قدم الرجل وظل الرأس (y-x) ثم نجري التشابه . حاول ذلك ؟؟؟

الجواب $\frac{dy}{dt} = 40\ m/min$

كما يمكن الحل بنفس الطريقة السابقة ويضاف الناتج الى سرعة الرجل للحصول على نفس الجواب .

2015 دور 2

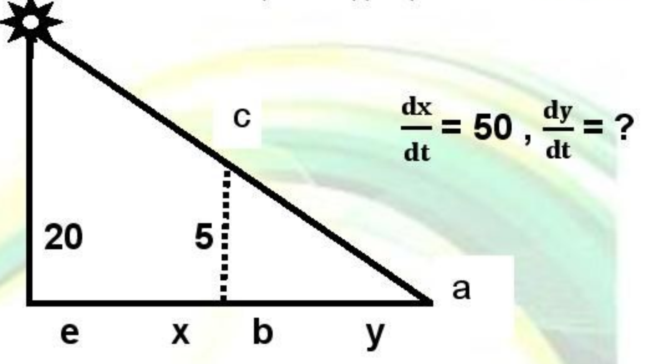
عمود طوله 6.4 m في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله 1.6 m مبتعدا عن العمود وبسرعة 30 m/min جد سرعة تغير طول ظل الرجل .

2016 دور2 خارج

فنار ميناء ارتفاعه 20 m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5m مبتعدة عن الفنار بسرعة 50 km/h جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر .

الحل :- نفرض البعد بين السفينة وقاعدة الفنار = x ، نفرض ان طول ظل السفينة = y

$\frac{dx}{dt} = 50 , \frac{dy}{dt} = ?$



من تشابه المثلثين abc , aef

$\frac{5}{20} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$

$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$

$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt} \Rightarrow 50 = 3\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = (\frac{50}{3})$ km/h

تأكيد \ في عموم الاسئلة الفيزيائية اذا وجد اختلاف في وحدات السؤال يجب اللجوء الى توحيد الوحدات قبل الشروع في الحل ولكن في اسئلة التشابه الذي يعتمد في الاساس على مبدأ النسب فيجوز الشروع في الحل بعد التحقق من ان كل نسبة افقية او عمودية تحوي على نفس الوحدة كما حدث في هذا السؤال حيث ان $\frac{km}{km} = \frac{m}{m}$ ويمكن جعلها بالصورة $\frac{km}{km} = \frac{km}{km}$ وكلا الحلين صحيحين ويوصل الى نفس الناتج لذا اقتضى التنويه .

2013 دور 1 خارج
2015 خارج د1

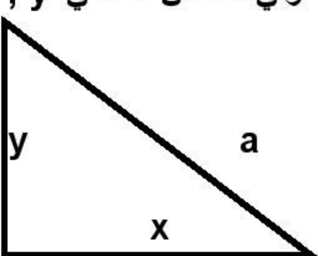
سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/s جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

الحل :- نفرض طولي الضلعن القائمي x , y وليكن طول الوتر a (عددا ثابتا)

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\frac{dx}{dt} = 2$

$\frac{dy}{dt} = ?$



$a^2 = x^2 + y^2$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ ......(1

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$ .... (2

$0 = 2x\,(2) + 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dt} \Rightarrow 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dt} = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ m/s

معدل انزلاق طرفه العلوي تساوي $\frac{2}{\sqrt{3}}$ m/s

2015 د4 رصافة

سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $\frac{1}{5}$ m/s جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

2016 دور 2

سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/s جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{4}$.

الحل :- نفرض طولي الضلعن القائمي x , y وليكن طول الوتر a (عددا ثابتا)

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{dx}{dt} = 2$

$\frac{dy}{dt} = ?$

y a x

$a^2 = x^2 + y^2$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ ......(1

$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} \Rightarrow 1 = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x$ .... (2

$0 = 2x\,(2) + 2x\frac{dy}{dt} \Rightarrow 2x\frac{dy}{dt} = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2$ m/s

معدل انزلاق طرفه العلوي تساوي 2 m/s

التقييم \ السؤال منهجي جدا ضمن تمارين الكتاب وتم تغيير الزاوية فقط ويعد من الاسئلة المتوسطة الصعوبة وقد ورد وزاريا في ثلاث سنوات اثنان منها نصا وفي الثالثة تغيير سرعة حركة طرفه السفلي مع الابقاء على الزاوية نفسها .

2013 دور 1 خارج

لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة(7،0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون x = 4 .

sol : let M = (x , y) , N = (7 , 0) , S = M N طول

$D = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$, $y^2 = 4x$ بالتعويض

$D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$

$\frac{dD}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = -\frac{2}{10}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1$ unit/s

---

2016 تمهيدي

لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $x^2 = 4y$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة(7،0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M عندما يكون y = 4 .

يمكن ملاحظة العلاقة العددية بين هذا السؤال والسؤال الوزاري السابق

2012 دور 2

لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M .

sol : let M = (x , y) , N = $(0 , \frac{3}{2})$, S = M N طول , $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$

$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{3}{2})^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$, $y = x^2$ بالتعويض

$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \Rightarrow s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$

$2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$ بتربيع الطرفين

$4(y^2 - 2y + \frac{9}{4}) = 9y^2 - 18y + 9 \Rightarrow [\, 4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9 \,]$

$5y^2 - 10y = 0 \Rightarrow 5y(y-2) = 0$

2014 دور 1

$y = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل OR $y = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$M = \{ (\sqrt{2} , 2) , (-\sqrt{2} , 2) \}$ مجموعة الحل

لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلث المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M .

تنبيه !! لعله في النية (على اعتبار ان الاعمال بالنيات) ان تكون هذه الثلث هي ثلثي ويكون الحل كسابقه

اما اذا كانت النية حقيقية هي ثلث فيكون الحل عجيبا غريبا كما يلي :-

sol : let $M = (x , y)$, $N = (0, \frac{3}{2})$, $S = MN$ طول , $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$

$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{3}{2})^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}$, $y = x^2$ بالتعويض

$s = \sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}} \Rightarrow s = \sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$

$\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}} = 3y - 3$ بتربيع الطرفين

$(y^2-2y+\frac{9}{4}) = 9y^2 - 18y + 9 \Rightarrow$

$[\,8y^2 - 16y + \frac{27}{4} = 0\,] \div 8 \Rightarrow [\,y^2 - 2y + \frac{27}{32} = 0\,] \Rightarrow y^2 - 2y = -\frac{27}{32}$

$y^2 - 2y + 1 = -\frac{27}{32} + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{5}{32} \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{32}} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$

$y = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}}$

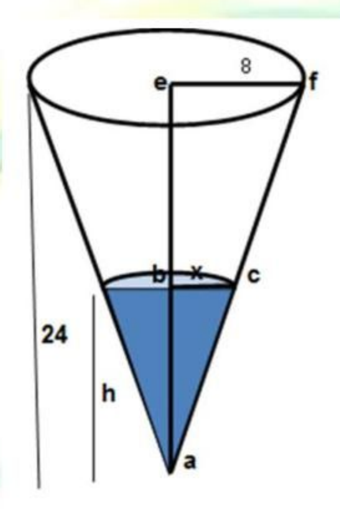
2014 دور 4 انبار

مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل 4 cm .

sol : let V = حجم الماء المخروطي الشكل , x = نصف قطر قاعدة الماء , h = ارتفاع الماء

$\frac{dv}{dt} = 5-1 = 4\ cm^3/s$

$x = 4 , \frac{dx}{dt} = ?$



$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$

$\tan\theta = \frac{8}{24} = \frac{x}{h}$ او من تشابه المثلثين abc, aef

$8h = 24x \Rightarrow h = 3x$

$V = \frac{\pi}{3} x^2 (3x) \Rightarrow V = \pi x^3$

$\frac{dv}{dt} = 3\pi x^2 \frac{dx}{dt}$

$4 = 3\pi (4)^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4}{48\pi} = \frac{1}{12\pi}$ cm/s

---

2014 تمهيدي

جد مجموعة النقط التي تنتمي الى الدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساويا للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t .

sol : let M (x , y) ; $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt} = 8\frac{dy}{dt} - 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow (2x + 4)\frac{dx}{dt} = (8 - 2y)\frac{dy}{dt}$$

$$\because \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow [(2x + 4) = (8 - 2y)] \div 2 \Rightarrow x + 2 = 4 - y \Rightarrow y = 2 - x \quad .... (1$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108 \quad .... (2$$

$$x^2 + (2 - x)^2 + 4x - 8(2 - x) - 108 = 0$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x - 108 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 120 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0$$

$$x = -10 \Rightarrow y = 2 + 10 = 12 \quad OR \quad x = 6 \Rightarrow y = 2 - 6 = -4$$

$$M = \{(-10 , 12) , (6 , -4)\}$$



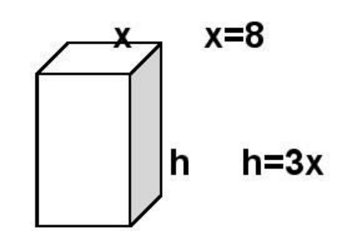


2016 دور 1 خ

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل تغير حجمها ومساحتها السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة 8m ومعدل تغير طول القاعدة $\frac{1}{4}$ m/s .

الحل \\ نفرض ان طول القاعدة = x ، والارتفاع = h ، حيث ان h = 3x

حجم متوازي المستطيلات v = مساحة القاعدة × الارتفاع
المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات A = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × مساحة القاعدة



$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$

$V = x^2 h \Rightarrow V = x^2(3x) \Rightarrow V = 3x^3$

$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9(8)^2(\frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 144\ m^3/s$

$A = 4x\,h + 2x^2 \Rightarrow A = 12x^2 + 2x^2 \Rightarrow A = 14x^2$

$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(8)(\frac{1}{4}) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 56\ m^2/s$

تلميح \\ بما ان المعطيات في السؤال بدلالة x نقوم بتوحيد المتغيرات في القانون بدلالة x ، ولو كانت المعطيات بدلالة h فنقوم بتوحيدها بدلالة h ايضا حيث ان اذا كانت h = 3x فيكون عندها $x = \frac{h}{3}$ ارجو الانتباه

تأكيد \\ يمكن ان يحل السؤال بطريقة اخرى وذلك باعتبار العلاقة h = 3x علاقة اساسية ويتم اشتقاقها لينتج ان $\frac{dh}{dt} = 3\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4}$, $x = 8 \rightarrow h = 24$ ثم نشتق القانون العام $V = x^2 h$ حسب مشتقة حاصل ضرب دالتين ونعوض كلا بمكانه لينتج نفس الناتج $\frac{dA}{dt} = 56\ m^2/s$ .... جرب بنفسك ....

مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة والتقريب

2011 دور 1

بين ان الدالة $f(x) = (x - 1)^4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1, 3]$ ثم جد قيمة c حيث ان $f'(c) = 0$

الحل :-

أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-1, 3]$ لانها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 3)$ لانها كثيرة حدود .

جـ) $f(3) = (3 - 1)^4 = 16 \;, f(-1) = (-1 - 1)^4 = 16 \Rightarrow f(3) = f(-1)$

$f'(x) = 4(x - 1)^3$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 4(c - 1)^3 = 0 \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 3)$

2012 دور 1

ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 - x + 1$ على الفترة $[-1,2]$ وان تحققت جد قيمة c

الحل :-

1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1, 2]$ لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$ لانها كثيرة حدود .

3) يوجد على الاقل قيمة واحدة $c \in (a, b)$ وتحقق $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(2) = 4 - 2 + 1 = 3 \;, f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1} = \frac{(3) - (3)}{3} = 0$ ميل الوتر , $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(c) = 2c - 1$

ميل المماس = ميل الوتر $\Rightarrow 2c - 1 = 0 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (-1, 2)$

2013 دور 2

باستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $f(x) = x^4 + 2x^2$ حيث $x \in [-2, 2]$

الحل :-

أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-2, 2]$ لانها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2, 2)$ لانها كثيرة حدود .

جـ) $f(-2) = 16 + 8 = 24 \;, f(2) = 16 + 8 = 24 \Rightarrow f(-2) = f(2)$

$f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 4c^3 + 4c = 0 \Rightarrow 4c(c^2 + 1) = 0 \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$

or $c^2 + 1 = 0$ وهذا غير ممكن لانه مجموع مربعين

2012 خارج القطر

ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$f(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad , \quad x \in [\frac{1}{2}, 2]$

الحل :- أ) الدالة مستمرة على الفترة $[\frac{1}{2}, 2]$ لان الفترة تقع ضمن مجالها $R / \{0\}$

let $a \in [\frac{1}{2}, 2] \Rightarrow f(a) = 2a + \frac{2}{a} \in R \Rightarrow$ الدالة معرفة

$\lim_{x \to a} f(x) = 2a + \frac{2}{a} \in R \Rightarrow$ الغاية موجودة

$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow$ الدالة مستمرة

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(\frac{1}{2}, 2)$ لان الفترة تقع ضمن مجالها $R / \{0\}$

جـ) $f(\frac{1}{2}) = 1 + 4 = 5 \quad , \quad f(2) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = f(2)$

$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} \quad , \quad f'(c) = 0$

$2 - \frac{2}{c^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2}{c^2} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \in (\frac{1}{2}, 2)$ OR $c = -1 \notin (\frac{1}{2}, 2)$

2013 خارج القطر

ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \quad : \quad x \in [-1, 1]$

الحل :- أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-1, 1]$ لانها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1 ، 1)$ لانها كثيرة حدود .

جـ) $f(1) = 9 + 3 - 1 = 11 \quad , \quad f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$

$\because f(1) \neq f(-1) \Rightarrow$ نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث

2014 خارج القطر

$f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فاذا كانت $c \in (-1, b)$ ، $c = 2$ فجد قيمتي $a, b \in R$.

الحل \ بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول فان $f(-1) = f(b)$

$f(-1) = a + 4 + 5 = a + 9 \quad , \quad f(b) = ab^2 - 4b + 5$

$ab^2 - 4b + 5 = a + 9 \quad .... (1)$

$f'(x) = 2ax - 4 \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow 2ac - 4 = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ (in1)

$b^2 - 4b + 5 = 1 + 9 \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Rightarrow (b - 5)(b + 1) = 0$

either $b = 5$ OR $b = -1$ تهمل

2014 دور 2
2016 دور 2 خارج

هل ان f(x) تحقق مبرهنة رول على الفترة [1 , 1-] ؟ وان تحققت جد قيمة c حيث ان $h(x) = x^3 - x$

الدالة مستمرة على الفترة [1, 1-] لانها كثيرة حدود

) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (1, 1-) لانها كثيرة حدود .

جـ) $h(1) = 1 - 1 = 0 \ , h(-1) = -1 + 1 = 0 \ \Rightarrow h(1) = h(-1)$

$h'(x) = 3x^2 - 1$

$h'(c) = 0 \ \Rightarrow \ 3c^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ 3c^2 = 1 \ \Rightarrow \ c^2 = \frac{1}{3}$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1 , 1) \quad OR \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1 , 1)$

2014 دور 4 انبار

هل بالامكان تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $h(x) = x^2 - 4x + 5$ ضمن الفترة [5 , 1-]

الحل :- 1) الدالة مستمرة على الفترة [5, 1-] لانها كثيرة حدود .

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (5 , 1-) لانها كثيرة حدود .

3) يوجد على الاقل قيمة واحدة ($c \in (a , b)$ وتحقق $h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$

ميل المماس $h'(x) = 2x - 4 \ \Rightarrow \ h'(c) = 2c - 4$

ميل الوتر $\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{h(5)-h(-1)}{5+1} = \frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{6} = \frac{(10)-(10)}{6} = 0$

$2c - 4 = 0 \ \Rightarrow \ 2c = 4 \ \Rightarrow \ c = 2 \in (-1 , 5)$

2014 دور 1
2015 دور 1

برهن ان الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة c على [7 , 1-]

الحل :- 1) الدالة مستمرة على الفترة [7 , 1-] لانها كثيرة حدود .

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (7 , 1-) لانها كثيرة حدود .

3) يوجد على الاقل قيمة واحدة ($c \in (a , b)$ وتحقق $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس $f'(x) = 2x - 6 \ \Rightarrow \ f'(c) = 2c - 6$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7+1} = \frac{(49-42+4)-(1+6+4)}{8} = \frac{(11)-(11)}{8} = 0$

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 6 = 0 \ \Rightarrow \ 2c = 6 \ \Rightarrow \ c = 3 \in (-1 , 7)$

2014 تمهيدي خ
2016 دور اول

اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ ، $f:[0 , b] \Rightarrow R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ ، جد قيمة b .

الحل :- بما ان الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة فانها مستمرة وقابلة للاشتقاق بالاضافة الى انها تحقق وجود قيمة واحدةعلى الاقل حيث $c \in (a , b)$ وتحقق $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس $f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f'(c)= 3c^2 - 8c \Rightarrow f'(\frac{2}{3})= 3(\frac{2}{3})^2 - 8(\frac{2}{3}) = -4$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(0)}{b-0} = \frac{(b^3-4b^2)-(0)}{b} = \frac{b^3-4b^2}{b}$

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{b^3-4b^2}{b} = -4 \Rightarrow b^3 - 4b^2 = -4b \Rightarrow b^3 - 4b^2 + 4b = 0$

$b(b^2 - 4b + 4) = 0 \Rightarrow b(b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 0$ يهمل OR $(b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2$

2015 تمهيدي

اثبت ان الدالة $f(x) = (2 - x)^2$ حيث $x \in [0 , 4]$ تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة (c) .

الحل :- أ) الدالة مستمرة على الفترة $[0 , 4]$ لانها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0 , 4)$ لانها كثيرة حدود .

جـ) $f(0) = (2 - 0)^2 = 4 , f(4) = (2 - 4)^2 = 4 \Rightarrow f(0) = f(4)$

$f'(x) = 2(2 - x)(-1) = -4 + 2x$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -4 + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (0 , 4)$

1997 دور 2

مربع مساحته $50\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات .

الحل :- مساحة المربع = (طول الضلع)^2 $\quad A = m^2 \Rightarrow 50 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{50}$

$m(x) = \sqrt{x}$

let $a = 49$, $b = 50$, $h = b - a = 50 - 49 = 1$, $m(a) = \sqrt{49} = 7$

$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} = 0.071$

$m(a + h) \approx m(a) + h.m'(a) \Rightarrow m(48) \approx 7 + (1)(0.071) \approx 7 + 0.071 \approx 7.071cm$

1998 دور 2
2015 د4 رصافة

لتكن $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$ جد f(1.02) بصورة تقريبية .

sol : $f(x) = \sqrt[3]{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{3}}$

let a = 1 , b = 1.02 , h = b - a = 0.02 , $f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2a+6)^2}} = \frac{2}{3(4)} = \frac{1}{6} = 0.16$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.02) \approx 2 + (0.0032) \approx 2.0032$

2000 دور 1

مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبي لتغير حجمه اذا تغير ارتفاعه من 4 cm الى 4.01 cm باستخدام مفهوم التفاضلات .

الحل \ نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط (r) والارتفاع y حيث ان y = r

$v = \frac{\pi}{3} r^2 y \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} y^2 y \Rightarrow v_{(y)} = \frac{\pi}{3} y^3$

let a = 4 , b = 4.01 , h = b - a = 0.01

$v'_{(y)} = \pi y^2 \Rightarrow v'_{(a)} = \pi a^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$

$h.v'(a) \approx (16\pi)(0.01) \approx 0.16\pi \ cm^3$ القيمة التقريبية لتغير الحجم

2001 دور 2

جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt[3]{126}$

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let a = 125 , b = 126 , h = b - a = 1 , $f(a) = \sqrt[3]{125} = 5$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(126) \approx 5 + (0.013)(1) \approx 5.013$

2002 دور 2

لتكن $f(x)=\sqrt{4x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية .

$f(x)=\sqrt{4x+5}$

let $a = 1$, $b = 1.001$, $h = b - a = 0.001$, $f(a)=\sqrt{4+5}=3$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{2\sqrt{4x+5}}=\frac{2}{\sqrt{4x+5}} \Rightarrow f'(a)=\frac{2}{\sqrt{4a+5}}=\frac{2}{\sqrt{4+5}}=\frac{2}{3}=0.6$

$f(a+h)\approx f(a)+h.f'(a) \Rightarrow f(1.001)\approx 3+(0.001)(0.6)\approx 3.0006$

2003 دور 1

جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt{99}$

sol : $f(x)=\sqrt{x}$

let $a = 100$, $b = 99$, $h = b - a = 99 - 100 = -1$, $f(a)=\sqrt{100}=10$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{100}}=\frac{1}{20}=0.05$

$f(a+h)\approx f(a)+h.f'(a) \Rightarrow f(99)\approx 10+(-1)(0.05)\approx 9.95$

2004 دور 1

لتكن $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات.

sol : $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}=(3x+5)^{\frac{1}{3}}$

let $a = 1$, $b = 1.001$, $h = b - a = 0.001$, $f(a)=\sqrt[3]{8}=2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(3x+5)^{\frac{-2}{3}}(3)=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3a+5)^2}}=\frac{1}{4}=0.25$

$f(a+h)\approx f(a)+h.f'(a) \Rightarrow f(1.001)\approx 2+(0.00025)\approx 2.0025$

2013 دور 1

مربع مساحته $48\ cm^2$ جد بصورة تقريبية طول ضلعه .

الحل :- مساحة المربع = (طول الضلع)^2 $\quad A=m^2 \Rightarrow 48=m^2 \Rightarrow m=\sqrt{48}$

$m(x)=\sqrt{x}$

let $a = 49$, $b = 48$, $h = b - a = 48 - 49 = -1$, $m(a)=\sqrt{49}=7$

$\Rightarrow m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{14}=0.071$

$m(a+h)\approx m(a)+h.m'(a) \Rightarrow m(48)\approx 7+(-1)(0.071)\approx 7-0.071\approx 6.929cm$

2005 دور 1

باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها 2.99 cm بصورة تقريبية .

الحل :- حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$(نصف القطر)^3

$V = \frac{4\pi}{3}(2.99)^3$

$V(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

$a = 3 , b = 2.99 , h = b - a = -0.01 , v(a) = \frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$

$V'(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi (3)^2 = 36\pi$

$v(a+h) \approx v(a) + h.v'(a) \approx 36\pi + (-0.01)(36\pi) \approx 35.64\pi \ cm^3$

2006 تمهيدي
2016 دور 2

جد حجم كرة طول نصف قطرها 3.001 cm بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات

الحل :- حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$(نصف القطر)^3

$V = \frac{4\pi}{3}(3.001)^3$

$V(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

$a = 3 , b = 3.001 , h = b - a = 0.001 , v(a) = \frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$

$V'(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi (3)^2 = 36\pi$

$v(a+h) \approx v(a) + h.v'(a) \approx 36\pi + (0.001)(36\pi) \approx 36.036\pi \ cm^3$

ملاحظة \\ يمكن للطالب ان يستخرج $(3.001)^3$ عن طريق التعامل مع الدالة $f(x) = x^3$ لينتج ان $f(a+h) = 27.027$ ومن ثم يكتب قانون حجم الكرة ويكون الجواب النهائي له $v = \frac{4\pi}{3}(27.027) = 36.036\pi$ ويفضل الابتعاد عن هذا النوع من الحلول رغم صحتها العلمية .

2005 دور 2

لتكن $f(x) = \sqrt{3x+1}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية .

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

let $a = 1 , b = 1.001 , h = b - a = 0.001 , f(a) = \sqrt{3+1} = 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.001) \approx 2 + (0.001)(0.75) \approx 2.00075$

2008 دور 2
2016 تمهيدي

جد التقريبية للعدد $\sqrt[3]{26}$ باستخدام التفاضلات .

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let $a = 27$, $b = 26$, $h = b - a = -1$, $f(a) = \sqrt[3]{27} = 3$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(26) \approx 3 + (0.037)(-1) \approx 3 - 0.037 \approx 2.963$

2006 دور 2

باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let $a = -8$, $b = -9$, $h = b - a = -9 + 8 = -1$, $f(a) = \sqrt[3]{-8} = -2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(-9) \approx -2 + (0.083)(-1) \approx -2 - 0.083 \approx -2.083$

2007 دور 1

جد بصورة تقريبية وباستخدام مفهوم التفاضلات طول ضلع مربع مساحته $101\ cm^2$

لحل :- مساحة المربع = $(\text{طول الضلع})^2$ $A = m^2 \Rightarrow 101 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{101}$

$m(x) = \sqrt{x}$

let $a = 100$, $b = 101$, $h = b - a = 101 - 100 = 1$, $m(a) = \sqrt{100} = 10$

$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$

$m(a+h) = m(a) + h.m'(a) \Rightarrow m(101) \approx 10 + (1)(0.05) \approx 10 + 0.05 \approx 10.05cm$

2008 تمهيدي

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{143}$

sol : $f(x) = \sqrt{x}$

let a = 144 , b = 143 , h = b - a = 143 – 144 = -1 , $f(a) = \sqrt{144} = 12$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{144}} = \frac{1}{24} \approx 0.04$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(143) \approx 12 + (-1)(0.04) \approx 11.96$

2008 دور 1

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{0.98}$

sol : $f(x) = \sqrt{x}$

let a = 1 , b = 0.98 , h = b - a = - 0.02 , $f(a) = \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(143) \approx 1 + (-0.02)(0.5) \approx 1 - 0.1 \approx 0.99$

2008 دور 2 خارج

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{13.86}$

sol : $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

let a = 16 , b = 13.86 , h = b - a = - 2.14 , $f(a) = \sqrt[4]{16} = 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32} \approx 0.031$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(13.86) \approx 2 + (-0.0663) \approx 1.9347$

تأكيد \\ ان h في هذا السؤال كبيرة جدا قياسا بأصل العدد وعليه ستكون هذه النتيجة بعيدة بعض الشئ عن الواقع

2013 دور 1

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[3]{25.97}$

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let $a = 27$, $b = 25.97$, $h = b - a = -1.03$, $f(a) = \sqrt[3]{27} = 3$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} \approx 0.04$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(25.97) \approx 3 + (-0.0412) \approx 2.9588$

2009 تمهيدي

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{15^{-1}}$

sol : $f(x) = \sqrt{x^{-1}} = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

let $a = 16$, $b = 15$, $h = b - a = -1$, $f(a) = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{16^3}} = \frac{-1}{128} \approx -0.007$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(15) \approx 0.25 + (0.007) \approx 0.257$

2009 دور 1

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{0.008}$

sol : $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

let $a = 0.0081$, $b = 0.0080$, $h = b - a = -0.0001$, $f(a) = \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(0.0081)^3}} = \frac{1}{0.108} \approx 9$

$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(0.008) \approx 0.3 + (-0.0009) \approx 0.2991$

2010 تمهيدي

مكعب حجمه $124\ cm^3$ جد وباستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية طول ضلعه

الحل :- حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$

$V(m) = m^3 \Rightarrow 124 = m^3 \Rightarrow m = \sqrt[3]{124}$

$m(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let $a = 125$, $b = 124$, $h = b - a = -1$, $m(a) = \sqrt[3]{125} = 5$

$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$

$m(a + h) = m(a) + h.m'(a) \Rightarrow m(124) \approx 5 + (0.013)(-1) \approx 5 - 0.013 \approx 4.987$

2011 دور 1

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية $\sqrt[3]{7.8}$

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let $a = 8$, $b = 7.8$, $h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$, $f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(7.8) \approx 2 + (0.083)(-0.2) \approx 2 - 0.0166 \approx 1.9834$

2015 نازحين د1 ، 2015 دور 3

باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $\sqrt[3]{7.9}$

2012 تمهيدي

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية $\sqrt[3]{63}$

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let $a = 64$, $b = 63$, $h = b - a = 63 - 64 = -1$, $f(a) = \sqrt[3]{64} = 4$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48} = 0.0208$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(63) \approx 4 + (0.0208)(-1) \approx 4 - 0.0208 \approx 3.9792$

2012 دور2

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية $\sqrt{\frac{1}{2}}$

sol : $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

let $a = 0.49$, $b = 0.50$, $h = b - a = 0.50 - 0.49 = 0.01$, $f(a) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{1.4} = 0.7142$

$f(a + h) = f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(0.5) \approx 0.7 + (0.7142)(0.01) \approx 0.7 + 0.0071 \approx 0.7071$

2013 دور 1

اذا علمت ان $f(x) = \sqrt[5]{31x + 1}$ جد بصورة تقريبية $f(1.01)$ باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة .

sol : $f(x) = \sqrt[5]{31x + 1} = (31x + 1)^{\frac{1}{5}}$

$a = 1$, $b = 1.01$, $h = b - a = 0.01$, $f(a) = \sqrt[5]{32} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{5}(31x + 1)^{\frac{-4}{5}}(31) = \frac{31}{5\sqrt[5]{(31x+1)^4}}$

$f'(a) = \frac{31}{5\sqrt[5]{(31+1)^4}} = \frac{31}{80} = 0.3875 \approx 0.39$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.01) \approx 2 + (0.0039) \approx 2.0039$

2013 دور 2
1999 دور 1

مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10cm$.

الحل \ نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط (r)

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \Rightarrow 210\pi = \frac{\pi}{3} r^2 (10) \Rightarrow r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}$

$r(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

let $a = 64$, $b = 63$, $h = b - a = 63 - 64 = -1$, $r(a) = \sqrt{64} = 8$

$\Rightarrow r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow r'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} = 0.0625$

$r(a + h) \approx r(a) + h.r'(a) \Rightarrow r(63) \approx 8 - (0.0625) \approx 7.9375$

2014 تمهيدي
2011 خارج القطر

جد وبصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

sol : $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{-1}{3}}$

let $a = 8$, $b = 9$, $h = b - a = 9 - 8 = 1$, $f(a) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = 0.5$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{a^4}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{48} = -0.0208$

$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(9) \approx 0.5 + (-0.0208)(1) \approx 0.5 - 0.0208 \approx 0.4792$

2014 دور 1

رة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل :- حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$(نصف القطر)^3

$V = \frac{4\pi}{3}(6.1)^3$

$V(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

$a = 6$, $b = 6.1$, $h = b - a = 6.1 - 6 = 0.1$

$V'(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi (6)^2 = 144\pi$

$h.v'(a) = (0.1)(144\pi) = 14.4\pi \ cm^3$ حجم (كمية) الطلاء

2015 دور 1

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية ، علما طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي 3.99 cm

الحل :- حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)^2 × الارتفاع

$v = \frac{\pi}{3}r^2 y$, $\because y = 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2}y \Rightarrow v(y) = \frac{\pi}{12}y^3$

$a = 4$, $b = 3.99$, $h = b - a = 3.99 - 4 = -0.01$, $v(a) = \frac{\pi}{12}(4)^3 = \frac{64}{12}\pi = 5.33\pi$

$v'(y) = \frac{\pi}{4}y^2 \Rightarrow v'(a) = \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{\pi}{4}(4)^2 = 4\pi$

$v(a+h) = v(a) + h.v'(a) \Rightarrow v(3.99) = 5.3\pi + (4\pi)(-0.01)$

$= 5.33\pi - 0.04\pi = 5.29\pi \ cm^3$

تأكيد \\ بما ان الارتفاع يساوي طول القطر فإن طول نصف القطر يساوي 1.995 ويمكن ان نجعل القانون بدلالة نصف القطر بالشكل التالي $v = \frac{\pi}{3}r^2 y \Rightarrow v = \frac{\pi}{3}r^2(2r) \Rightarrow v = \frac{2\pi}{3}r^3$ عندها ستكون قيمة $a = 2$

2015 خارج د1

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

sol : $f(x) = x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 2 = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$

let $a = 1$, $b = 1.01$, $h = b - a = 0.01$, $f(a) = 1 + 3 + 2 = 6$

$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = 5a^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = 5 + 1 = 6$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(63) \approx 6 + (0.01)(6) \approx 6 + 0.06 \approx 6.06$

2015 دور 2

اذا كان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغير التقريبي للدالة اذا تغيرت x من 4 الى 4.01

sol : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$

let $a = 4$, $b = 4.01$, $h = b - a = 4.01 - 4 = 0.01$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{64}} = \frac{-1}{16} = -0.06$

$h.f'(a) \approx (0.01).(-0.06) \approx -0.0006$ مقدار التغير التقريبي

2015 دور 2 خارج

لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 125 الى 125.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

let $a = 125$, $b = 125.06$, $h = b - a = 125.06 - 125 = 0.06$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{15} = 0.13$

$h.f'(a) \approx (0.06).(0.13) \approx 0.0078$ مقدار التغير التقريبي

2016 دور 1 ج

جد بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{80} - \sqrt[4]{80}$

sol : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}$

let a = 81 , b = 80 , h = b - a = -1 , $f(a) = \sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 9 - 3 = 6$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{81}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{18} - \frac{1}{108} = \frac{5}{108} \approx 0.046$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(81) \approx 6 + (-0.046) \approx 5.954$

التقييم \\ السؤال ذو فكرة منهجية رغم عدم وجوده بالنص في الكتاب المنهجي وهو مقارب لسؤال التمـــــــارين $\sqrt[3]{63} + \sqrt{63}$ ومقارب اكثر من مثال الكتاب $\sqrt[4]{17} + \sqrt{17}$ وهذه الافكار المركبة لم ترد في الاسئلة الوزارية السابقة .

تأكيد \\ لو كان السؤال السابق بالصورة $\sqrt[3]{26} + \sqrt{26}$ فلا يوجد عدد قريب من العدد 26 له جذر تربيعي وتكعيبي في نفس الوقت وعليه يجب حل كل جذر لوحده ثم نجمع النتائج النهائية ارجو الانتباه . علما ان السؤال السابق يمكن حله بنفس هذه الطريقة المشار اليها لكن الحل بجزء واحد يكون افضل .



حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثالث (اسئلة الثوابت ورسم الدوال)

1997 دور 1

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذي الافقي $y = 1$, المحاذي العمودي (لايوجد)

❸ نقاط التقاطع

if $x = 0 \Rightarrow y = -1$, if $y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين (0 ,-1) , (1 , 0) , (-1 , 0)

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

❺ النهايات

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}=0$$

$4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0 , -1)$ نقطة حرجة

$x < 0$ $\quad$ $x > 0$

اشارة المشتقة الاولى ------ (0) ++++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

نقطة نهاية صغرى محلية (0 , -1)

(-1,0) (1,0) $(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{2})$ $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{2})$ (0,-1)

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2 .4-4x.2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4(x^2+1)^2-16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)[4(x^2+1)-16x^2]}{(x^2+1)^4}=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}=0$$

$4-12x^2=0 \Rightarrow 12x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

$y=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \Rightarrow$ نقاط انقلاب مرشحة $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{2}) , (-\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{2})$

اشارة المشتقة الثانية ------ $(-\frac{1}{\sqrt3})$ +++++++ $(\frac{1}{\sqrt3})$ ------

الدالة محدبة بالفترتين $\{x : x \in R ; x > \frac{1}{\sqrt3}\} , \{x : x \in R ; x < -\frac{1}{\sqrt3}\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x \in (-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})\}$

نقاط انقلاب $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{2}) , (-\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{2})$

1999 دور 1

2006 تمهيدي

2007 دور 1

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0 \;,\; \text{if } y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ OR } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

❺ النهايات

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2$

نقاط حرجة $(1, -2), (-1, 2)$

$x < -1 \quad (-1, 1) \quad x > 1$

اشارة المشتقة الاولى: +++++ -1 ------ (1) +++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x < -1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x \in (-1, 1)\}$

نهاية صغرى $(1, -2)$, نهاية عظمى $(-1, 2)$

$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ نقطة انقلاب مرشحة

$x < 0 \quad x > 0$

اشارة المشتقة الثانية: ------ 0 ++++++

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

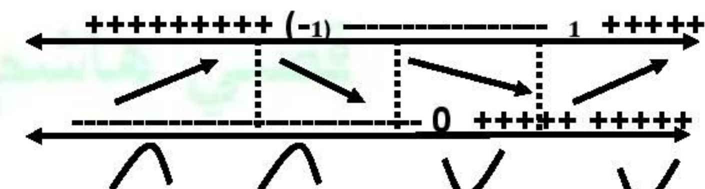
نقطة انقلاب $(0, 0)$

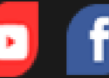
(1 , - 2)

$(\sqrt{3}, 0)$ (0, 0) $(\sqrt{3}, 0)$

(- 1 , 2)

+++++++++ (-1) ------------ 1 +++++





2000 دور 1
2006 دور 2
2008 تمهيدي
2007 خارج القطر
2013 دور 3
2014 تمهيدي

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^5$

تأكيد \\ بعض الاسئلة الوزارية كانت $F(x) = x^3$ ويكون له نفس الحل

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0 \ , \ \text{if } y = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقطة التقاطع مع المحورين الاحداثيين (0 , 0)

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^5 = -(x)^5 = -f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

❺ النهايات

$$f'(x) = 5x^4 \Rightarrow 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0 , 0)$ نقطة حرجة

$x < 0 \qquad x > 0$

اشارة المشتقة الاولى ++++++ 0 ++++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 0 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < 0 \}$

مجرد نقطة حرجة (0 , 0)

$$f''(x) = 20x^3 \Rightarrow 20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0 , 0)$ نقطة انقلاب مرشحة

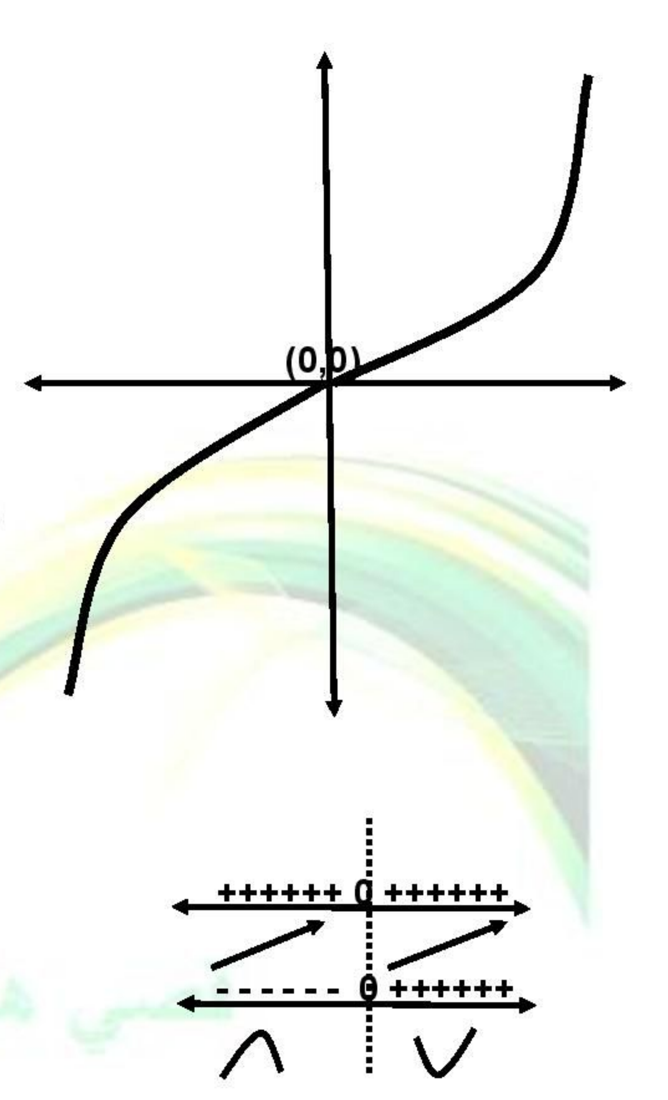
$x < 0 \qquad x > 0$

اشارة المشتقة الثانية ------ 0 ++++++

الدالة مقعرة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 0 \}$

الدالة محدبة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < 0 \}$

نقطة انقلاب (0 , 0)



2000 دور 2

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = (x^2 - 1)^2$

sol : $f(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 1 \quad , \quad \text{if } y = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,1) , (-1, 0) , (1, 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

❺ النهايات

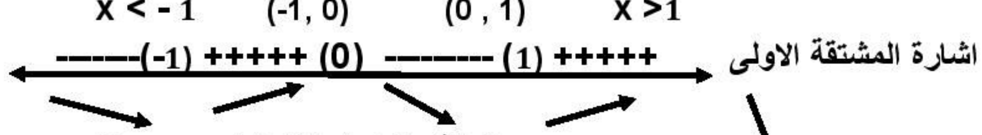
$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ OR $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ OR $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$

نقاط حرجة $(0, 1) , (-1 , 0) , (1 , 0)$

$x < -1 \qquad (-1, 0) \qquad (0 , 1) \qquad x > 1$

اشارة المشتقة الاولى



الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 1 \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < -1 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-1 , 0) \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (0 , 1) \}$

نهاية عظمى $(0 , 1)$, نهاية صغرى $(1, 0)$, نهاية صغرى $(-1 , 0)$

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9} \quad , \quad f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{4}{9}) , (\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{4}{9})$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة المشتقة الثانية $++++++ \ (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \ ---------- \ (\frac{1}{\sqrt{3}}) \ ++++++$

الدالة مقعرة بالفترتين $\{ x : x \in R ; x > \frac{1}{\sqrt{3}} \} , \{ x : x \in R ; x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \}$

الدالة محدبة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}) \}$

نقاط انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{4}{9}) , (\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{4}{9})$

2001 دور 2

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 + 3x^2$

❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0 \;,\; \text{if } y = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = -3$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0, 0) , (-3, 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2 = -(x^3 - 3x^2) \neq -f(x)$ لايوجد تناظر

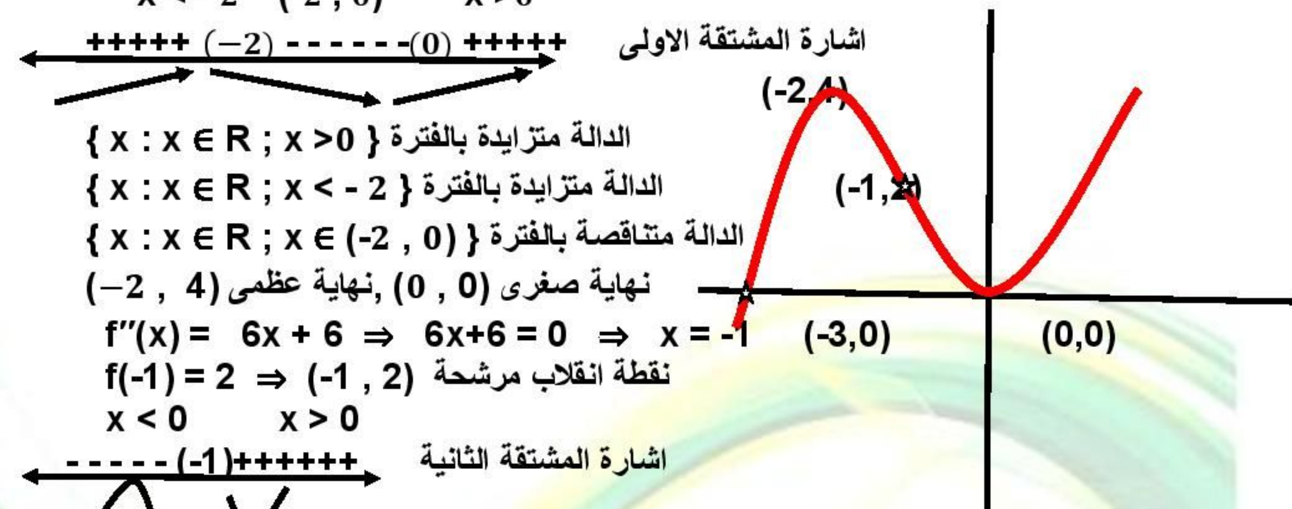
❺ النهايات

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0$$

either $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, or $x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4$

نقاط حرجة $(0 , 0) , (-2 , 4)$

$x < -2 \quad (-2 , 0) \quad x > 0$



اشارة المشتقة الاولى

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R \,;\, x > 0 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R \,;\, x < -2 \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R \,;\, x \in (-2 , 0) \}$

نهاية صغرى $(0 , 0)$, نهاية عظمى $(-2 , 4)$

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$f(-1) = 2 \Rightarrow (-1 , 2)$ نقطة انقلاب مرشحة

$x < 0 \qquad x > 0$

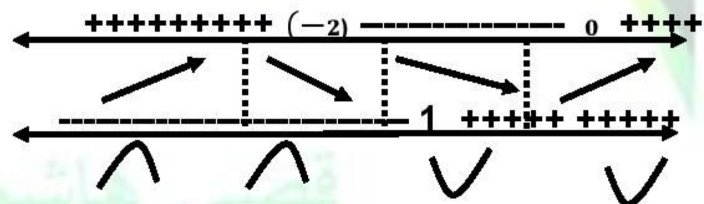
اشارة المشتقة الثانية

----- (-1) ++++++

الدالة محدبة بالفترة $\{ x : x \in R \,;\, x < -1 \}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{ x : x \in R \,;\, x > -1 \}$

نقطة انقلاب $(-1, 2)$



2002 دور 1 — باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحانيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = -3 \ , \ \text{if } y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

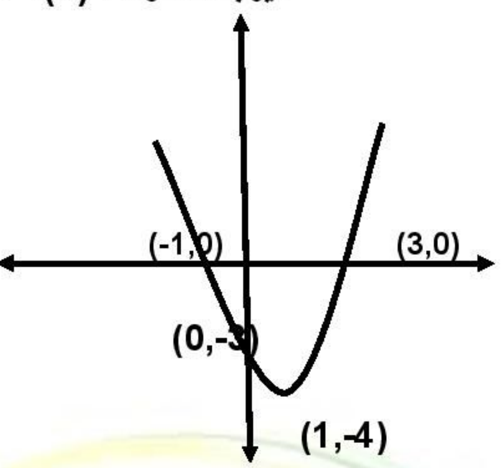
$\Rightarrow x = 3 \text{ OR } x = -1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0, -3), (3, 0), (-1, 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3 \neq -f(x) \Rightarrow$ لايوجد تناظر

❺ النهايات



$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

نقطة حرجة $(1, -4)$

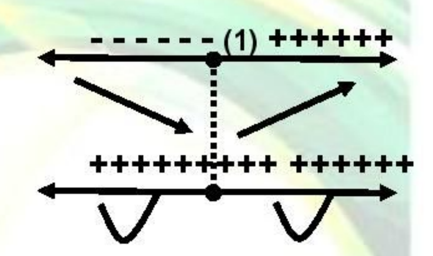
$x < -2 \qquad x > -2$

اشارة المشتقة الاولى ------ (1) ++++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 1\}$

نقطة نهاية صغرى محلية $(1, -4)$



$f''(x) = 2 > 0$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولاتوجد نقاط انقلاب

2005 تمهيدي

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^4 - 2x^2$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0 \ , \ \text{if } y = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ , \ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0 , 0) , (-\sqrt{2} , 0) , (\sqrt{2} , 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

❺ النهايات

$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ <u>OR</u> $x = 1 \Rightarrow f(1) = -1$ <u>OR</u> $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$

نقاط حرجة $(0, 0) , (-1 , -1) , (1 , -1)$

$x < -1 \quad (-1, 0) \quad (0 , 1) \quad x > 1$

اشارة المشتقة الاولى ------(-1) +++++ (0) --------- (1) +++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 1 \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < -1 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-1 , 0) \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (0 , 1) \}$

نهاية عظمى $(0 , 0)$, نهاية صغرى $(1, -1)$,نهاية صغرى $(-1 , -1)$

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9} \ , \ f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$

$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{5}{9}) , (\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{-5}{9})$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة المشتقة الثانية ++++++ $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ ---------- $(\frac{1}{\sqrt{3}})$ ++++++

الدالة مقعرة بالفترتين $\{ x : x \in R ; x > \frac{1}{\sqrt{3}} \} , \{ x : x \in R ; x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \}$

الدالة محدبة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}) \}$

نقاط انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{-5}{9}) , (\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{-5}{9})$

2005 دور 1
2008 دور 1

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 2$, $\text{if } y = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ OR } x = 1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0, 2), (-2, 0), (1, 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x + 2)(-x - 1)^2 = -(x - 2)(-x - 1)^2 \neq -f(x) \Rightarrow$ لايوجد تناظر

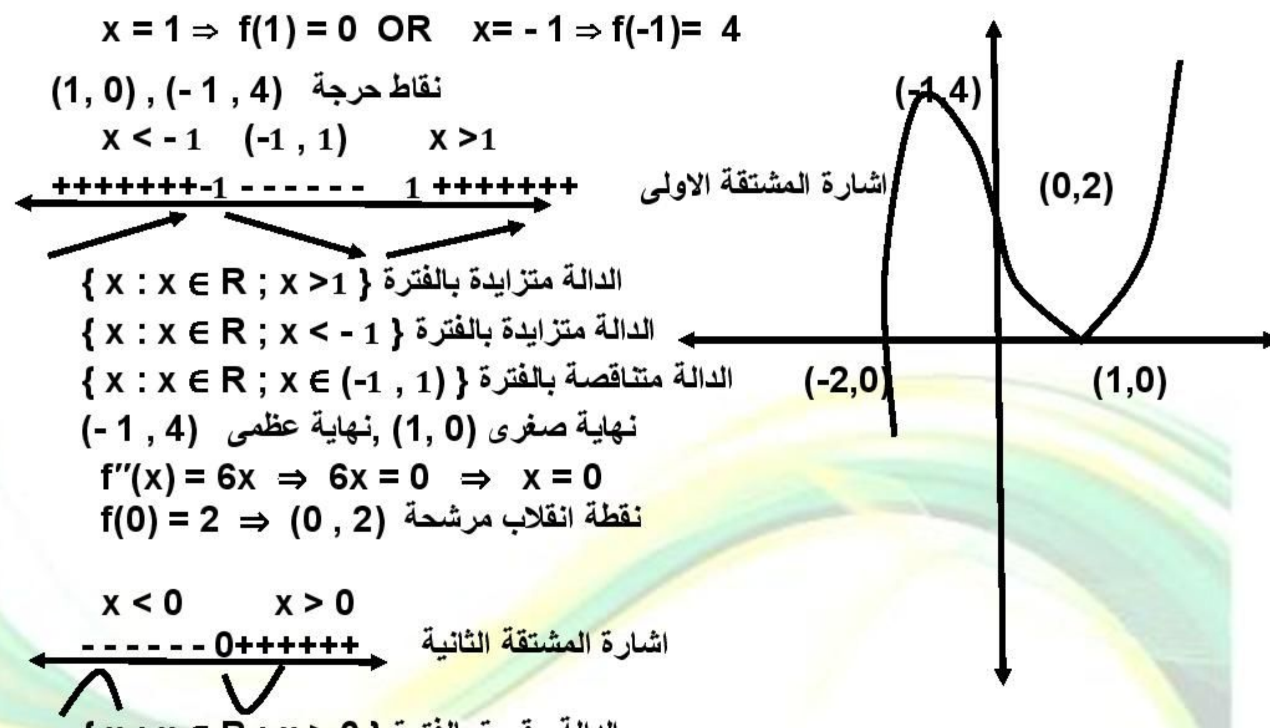
❺ النهايات

$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 1)$

$f'(x) = (x + 2)(2x - 2) + (x^2 - 2x + 1)(1) = 2x^2 - 2x + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1$

$= 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$



الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x < -1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x \in (-1, 1)\}$

نهاية صغرى $(1, 0)$, نهاية عظمى $(-1, 4)$

$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

نقطة انقلاب مرشحة $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$

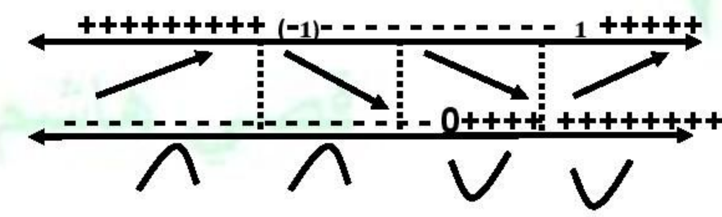
x < 0 x > 0

اشارة المشتقة الثانية - - - - - - 0++++++

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

نقطة انقلاب $(0, 2)$



2006 دور 1

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 2$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

if $x = 0 \Rightarrow y = 2$, if $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x+2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ OR $x = 1 \Rightarrow (0, 2), (-2, 0), (1, 0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

❹ التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 = -(x^3 - 3x - 2) \neq -f(x)$

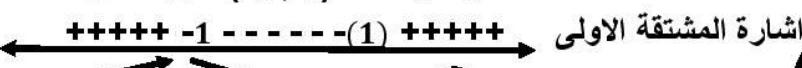
$\Rightarrow$ المنحني غير متناظر حول نقطة الاصل ولاحول محور الصادات

❺ النهايات

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ OR $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$

نقاط حرجة $(1, 0), (-1, 4)$



اشارة المشتقة الاولى

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x < -1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x \in (-1, 1)\}$

نهاية صغرى $(1, 0)$, نهاية عظمى $(-1, 4)$

$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$ نقطة انقلاب مرشحة

$x < 0$ $x > 0$

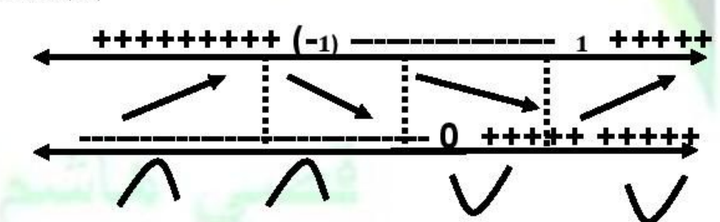
- - - - - - 0++++++ اشارة المشتقة الثانية

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

نقطة انقلاب $(0, 2)$

(-1 , 4) (0,2) (-2,0) (1,0) (-1 , 2)



2009 تمهيدي

2014 خارج القطر

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = \frac{1}{x+1}$

sol : ❶ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R/\{-1\}$ اوسع مجال للدالة

❷ المحاذي الافقي $y = 0$, المحاذي العمودي $x = -1$

❸ نقاط التقاطع

if $x = 0 \Rightarrow y = 1$, if $y = 0$ غير ممكن

نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0 , 1)$

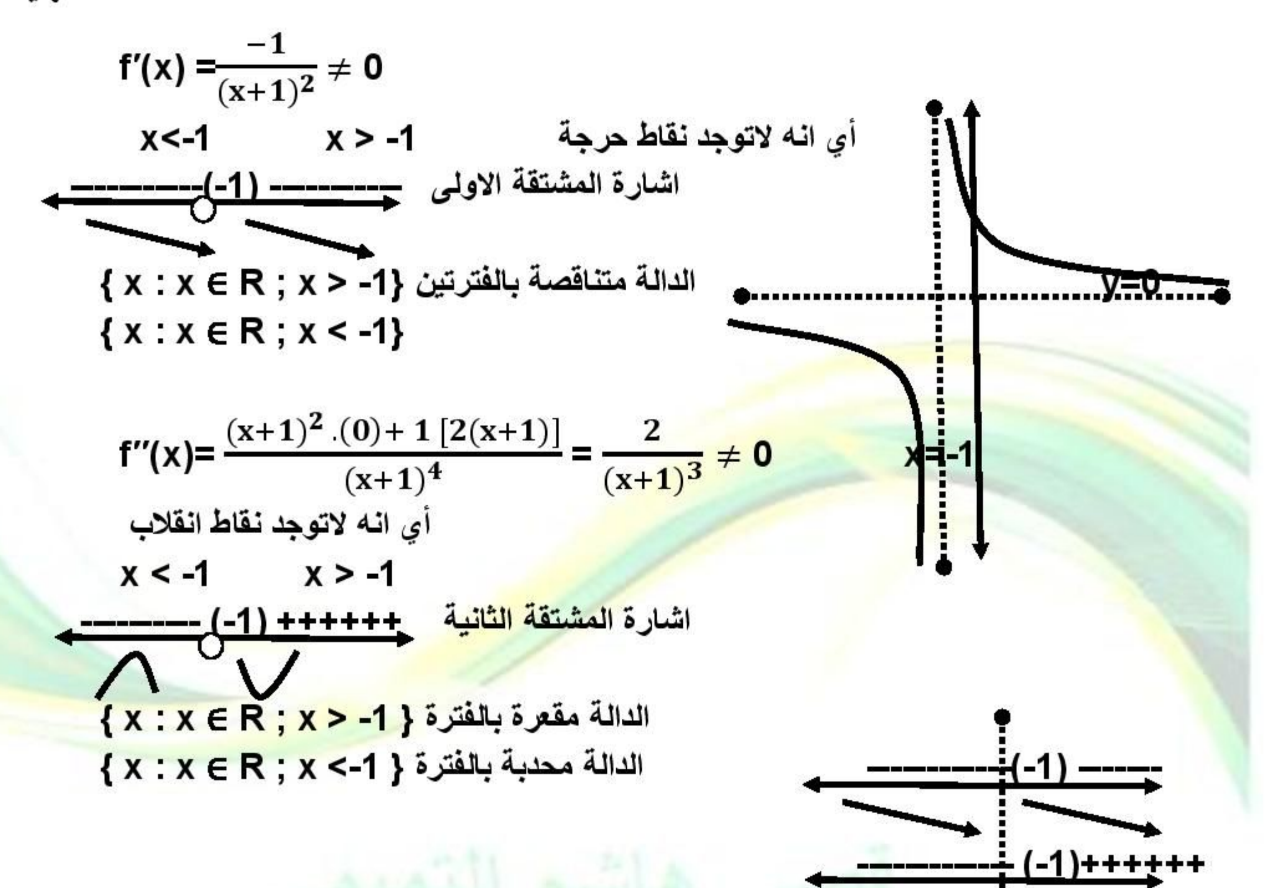
❹ التناظر

بما ان العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد (-1) لاينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

❺ النهايات

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \neq 0$

أي انه لاتوجد نقاط حرجة



الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x \in R ; x > -1\}$

$\{x : x \in R ; x < -1\}$

$f''(x) = \frac{(x+1)^2 .(0) + 1\,[2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0$

أي انه لاتوجد نقاط انقلاب

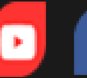
$x < -1$ $x > -1$

اشارة المشتقة الثانية

---------(-1) ++++++

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x > -1\}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x < -1\}$



2011 دور 1
2015 دور 3

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = 6x - 2x^3$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد ❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0 \ , \ \text{if } y = 0 \Rightarrow 6x - 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x(3 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ OR } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0 , 0) , (\sqrt{3} , 0) , (-\sqrt{3} , 0)$

❹ التناظر

$f(-x) = 6(-x) - 2(-x)^3 = -6x + 2x^3 = -(6x - 2x^3) = -f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

❺ النهايات

$f'(x) = 6 - 6x^2 \Rightarrow 6 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4$

نقاط حرجة $(1 , 4),(-1 , -4)$

$x < -1 \quad (-1 , 1) \quad x > 1$

اشارة المشتقة الاولى ------ (-1) +++++ 1 ------

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 1 \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < -1 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-1 , 1) \}$

نهاية صغرى $(-1 , -4)$, نهاية عظمى $(1 , 4)$

$f''(x) = -12x \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$

نقطة انقلاب مرشحة $f(0) = 0 \Rightarrow (0 , 0)$

$x < 0 \quad x > 0$

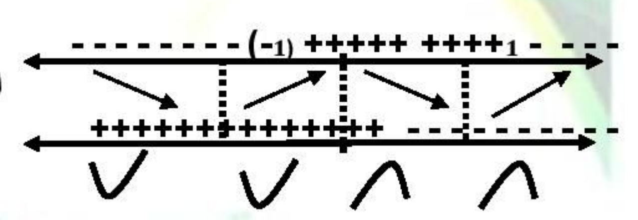
اشارة المشتقة الثانية ++++++ 0 ------

الدالة مقعرة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < 0 \}$

الدالة محدبة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 0 \}$

نقطة انقلاب $(0, 0)$

(1 , 4)
(−√3 , 0) (0,0) (√3 , 0)
(- 1 , - 4)



2011 دور 2
2013 دور 2
2016 تمهيدي

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = (1 - x)^3 + 1$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 2$, $\text{if } y = 0 \Rightarrow (1 - x)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (1 - x)^3 = -1$ بالجذر التكعيبي

$1 - x = -1 \Rightarrow x = 2$

$(0 , 2) , (2 , 0)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

❹ التناظر

$f(-x) = (1 + x)^3 + 1 = -[(-1-x)^3 - 1] \neq -f(x)$ لايوجد تناظر

❺ النهايات

$f'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 \Rightarrow (1 , 1)$ نقطة حرجة

$x < 1$ $\quad$ $x > 1$

اشارة المشتقة الاولى: ------1------

الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x \in R ; x > 1\}$

$\{x : x \in R ; x < 1\}$

$(1 , 1)$ مجرد نقطة حرجة

$f''(x) = -6(1 - x)(-1) = 6(1 - x) \Rightarrow 6(1 - x) = 0$

$\Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 \Rightarrow (1 , 1)$ نقطة انقلاب مرشحة

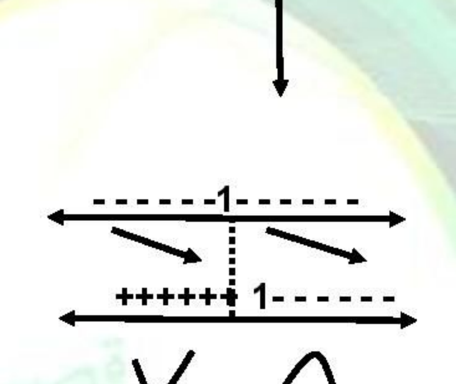
$x < 1$ $\quad$ $x > 1$

اشارة المشتقة الثانية: ++++++ 1------

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 1\}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 1\}$

$(1 , 1)$ نقطة انقلاب



------1------
++++++ 1------

2012 دور 2

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = 2x^2 - x^4$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

if $x = 0 \Rightarrow y = 0$, if $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$, $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0 , 0) , (-\sqrt{2} , 0) , (\sqrt{2} , 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

❺ النهايات

$f'(x) = 4x - 4x^3 \Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(1 - x2) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ OR $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$ OR $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1$

نقاط حرجة $(0, 0) , (-1 , 1) , (1 , 1)$

$x < -1$ $(-1, 0)$ $(0 , 1)$ $x > 1$

اشارة المشتقة الاولى +++++(-1) - - - - - (0) +++++ (1) - - - - -

(-1,1) (1,1) $(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9})$ $(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9})$ (0,0)

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > 1 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < -1 \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-1 , 0) \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (0 , 1) \}$

نهاية صغرى $(0 , 0)$, نهاية عظمى $(1, 1)$, نهاية عظمى $(-1 , 1)$

$f''(x) = 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9}) , (\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9})$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة المشتقة الثانية - - - - - - $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ +++++++ $(\frac{1}{\sqrt{3}})$ - - - - - -

الدالة محدبة بالفترتين $\{ x : x \in R ; x > \frac{1}{\sqrt{3}} \}$, $\{ x : x \in R ; x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{ x : x \in R ; x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}) \}$

نقاط انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9}) , (\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9})$



2012 تمهيدي — استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة $R/\{0\}$

❷ المحاذي الافقي $y = 0$, المحاذي العمودي $x = 0$

❸ نقاط التقاطع

if $x = 0 \Rightarrow y =$ غير معرف , if $y = 0 \Rightarrow x =$ غير معرف

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين $x \neq 0 , y \neq 0$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

المنحني متناظر حول نقطة الاصل ⇐

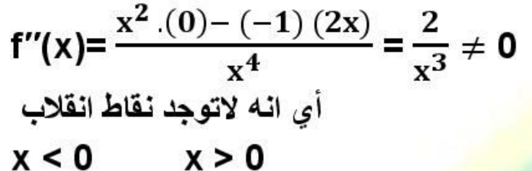
❺ النهايات

$$f'(x) = \frac{(x)(0)-(1)(1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \neq 0$$

أي انه لاتوجد نقاط حرجة

$x<0$ $x > 0$

اشارة المشتقة الاولى



الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x \in R ; x > 0\}$

$\{x : x \in R ; x < 0\}$

$$f''(x) = \frac{x^2 .(0)-(-1)(2x)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

أي انه لاتوجد نقاط انقلاب

$x < 0$ $x > 0$

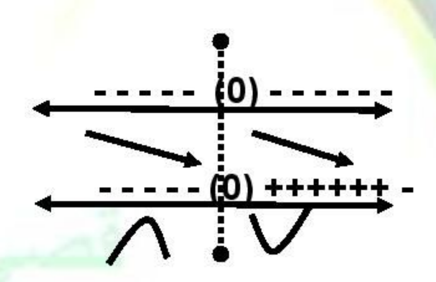
اشارة المشتقة الثانية - - - - - - (0) ++++++

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

x=0

y=0



2013 تمهيدي

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = 10 - 3x - x^2$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 10 \;,\; \text{if } y = 0 \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow (2 - x)(5 + x) = 0$$

$\Rightarrow x = -5 \;\text{ OR }\; x = 2$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0 , 10) , (-5 , 0) , (2 , 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2 \neq -f(x) \Rightarrow$ لايوجد تناظر

❺ النهايات

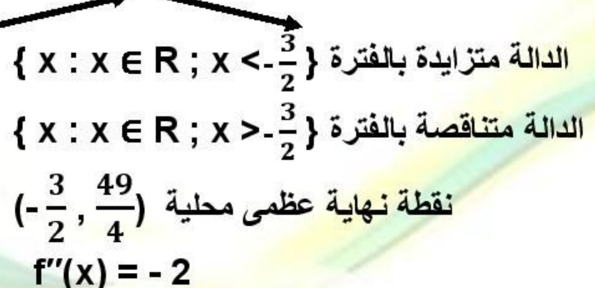
$$f'(x) = -3 - 2x \Rightarrow -3 - 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f(-\frac{3}{2}) = 10 - 3(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$$

$(-\frac{3}{2} , \frac{49}{4})$ نقطة حرجة

$x < \frac{-3}{2}$ $\quad x > \frac{-3}{2}$

اشارة المشتقة الاولى ++++++ $\frac{-3}{2}$ - - - - - -



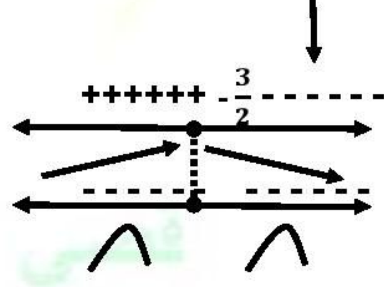
الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R ; x < -\frac{3}{2} \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R ; x > -\frac{3}{2} \}$

نقطة نهاية عظمى محلية $(-\frac{3}{2} , \frac{49}{4})$

$f''(x) = -2$

الدالة محدبة في كل مجالها ولاتوجد نقاط انقلاب



2014 دور 3

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = \frac{3}{x^2}$

sol : $y = \frac{3}{x^2}$

❶ اوسع مجال للدالة R/ {0}

❷ المحاذي الافقي y = 0 , المحاذي العمودي x = 0

❸ نقاط التقاطع

if x = 0 ⇒ y = ∞, if y = 0 ⇒ x = ∞

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين $x \neq 0 , y \neq 0$

❹ التناظر

$f(-x) = \frac{3}{(-x)^2} = \frac{3}{x^2} = f(x)$ ⇒ المنحني متناظر حول محور الصادات

❺ النهايات

$f'(x) = \frac{(x)(0)-(3)(2x)}{x^4} = \frac{-6}{x^3} \neq 0$

أي انه لاتوجد نقاط حرجة

x<0 x > 0

اشارة المشتقة الاولى +++++ (0) - - - - - -

الدالة متناقصة بالفترة { x : x ∈ R ; x >0}

الدالة متزايدة بالفترة { x : x ∈ R ; x <0}

$f''(x) = \frac{x^2.(0)-(-6)(3x^2)}{x^6} = \frac{18}{x^4} \neq 0$

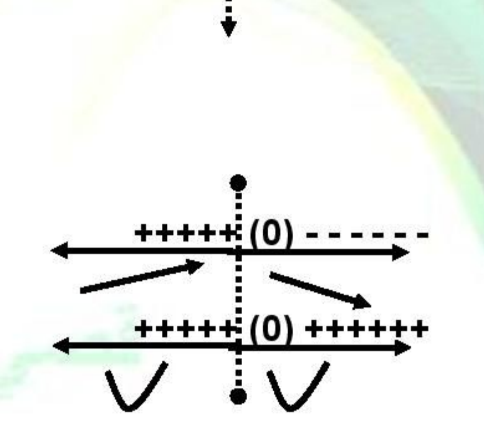
أي انه لاتوجد نقاط انقلاب

x < 0 x > 0

اشارة المشتقة الثانية ++++++ (0) ++++++

الدالة مقعرة بالفترتين { x : x ∈ R ; x > 0 }

{ x : x ∈ R ; x < 0 }



2015 تمهيدي

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R , ❷ المحاذيات لاتوجد

❸ نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 4 \ , \ \text{if } y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$x^3 + x^2 - x^2 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - 4(x^2-1) = 0$

$x^2(x+1) - 4(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)[x^2 - 4(x-1)] = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2-4x+4) = 0$

(غير مطلوبة وزاريا)

$(x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ OR } x = 2$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين هي $(0 , 4) , (-1 , 0) , (2 , 0)$

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 = -(x^3 + 3x^2 - 4) \neq -f(x)$

⇐ لايوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل

❺ النهايات $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \text{ OR } x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow (0 , 4),(2 , 0)$ نقاط حرجة

$x < 0 \qquad (0 , 2) \qquad x > 2$

اشارة المشتقة الاولى: ++++++ 0 - - - - - - 2+++++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R \ ; \ x > 2 \}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{ x : x \in R \ ; \ x < 0 \}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{ x : x \in R \ ; \ x \in (0 , 2) \}$

نهاية صغرى $(2 , 0)$, نهاية عظمى $(0 , 4)$

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow (1 , 2)$ نقطة انقلاب مرشحة

$x < 1 \qquad x > 1$

اشارة المشتقة الثانية: - - - - - - 1 ++++++

الدالة مقعرة بالفترة $\{ x : x \in R \ ; \ x > 1 \}$

الدالة محدبة بالفترة $\{ x : x \in R \ ; \ x < 1 \}$

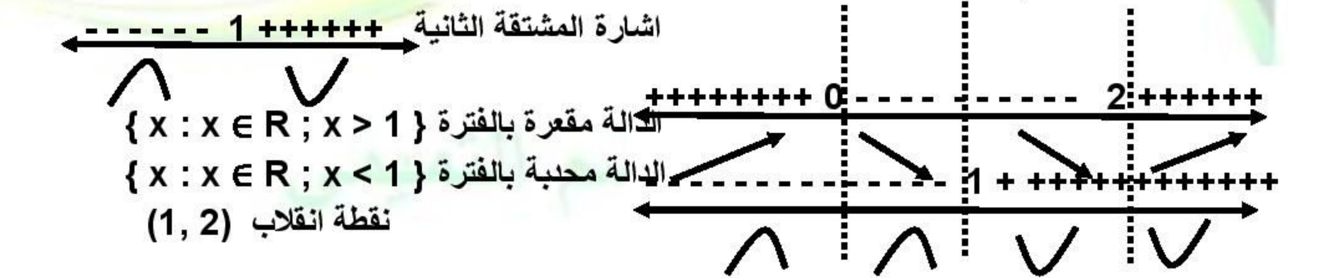
نقطة انقلاب $(1, 2)$

(0,4)

(1,2)

(-1,0)

(2,0)



2015 دور 2 خارج

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

sol : ❶ اوسع مجال للدالة R

❷ المحاذي الافقي $y = 0$, المحاذي العمودي (لايوجد)

❸ نقاط التقاطع

if $x = 0 \Rightarrow y = 2$, $y \neq 0$

نقطة التقاطع مع المحور الصادي (0 , 2)

❹ التناظر $\forall x \in R , \exists (-x) \in R$

$f(-x)=\frac{6}{(-x)^2+3}=\frac{6}{x^2+3}=f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

❺ النهايات

$$f'(x)=\frac{(x^2+3)(0)-(6)(2x)}{(x^2+3)^2}=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}=0$$

$-12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0 , 2)$ نقطة حرجة

$x< 0$ $x > 0$

اشارة المشتقة الاولى ++++++ (0) - - - - - -

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R ; x < 0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R ; x > 0\}$

نقطة نهاية عظمى محلية (0 , 2)

(0,2) , $(-1,\frac{3}{2})$, $(1,\frac{3}{2})$, y=0

$$f''(x)=\frac{(x^2+3)^2.(-12)-(-12x).2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4}=\frac{-12(x^2+3)^2+48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4}=\frac{-12x^2-36+48x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}=0$$

$36x^2-36=0 \Rightarrow 36x^2=36 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$$y=\frac{6}{1+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

نقاط انقلاب مرشحة $(1,\frac{3}{2}) , (-1,\frac{3}{2})$

اشارة المشتقة الثانية +++++++(-1) - - - - - -(1) +++++++

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x : x \in R ; x < -1\}$, $\{x : x \in R ; x > 1\}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x \in (-1,1)\}$

نقاط انقلاب $(1,\frac{3}{2}) , (-1,\frac{3}{2})$

2016 دور 2

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

sol : ❶ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R/\{-1\}$ اوسع مجال للدالة

❷ $x = -1$ المحاذي العمودي , $y = 1$ المحاذي الافقي

❸ نقاط التقاطع

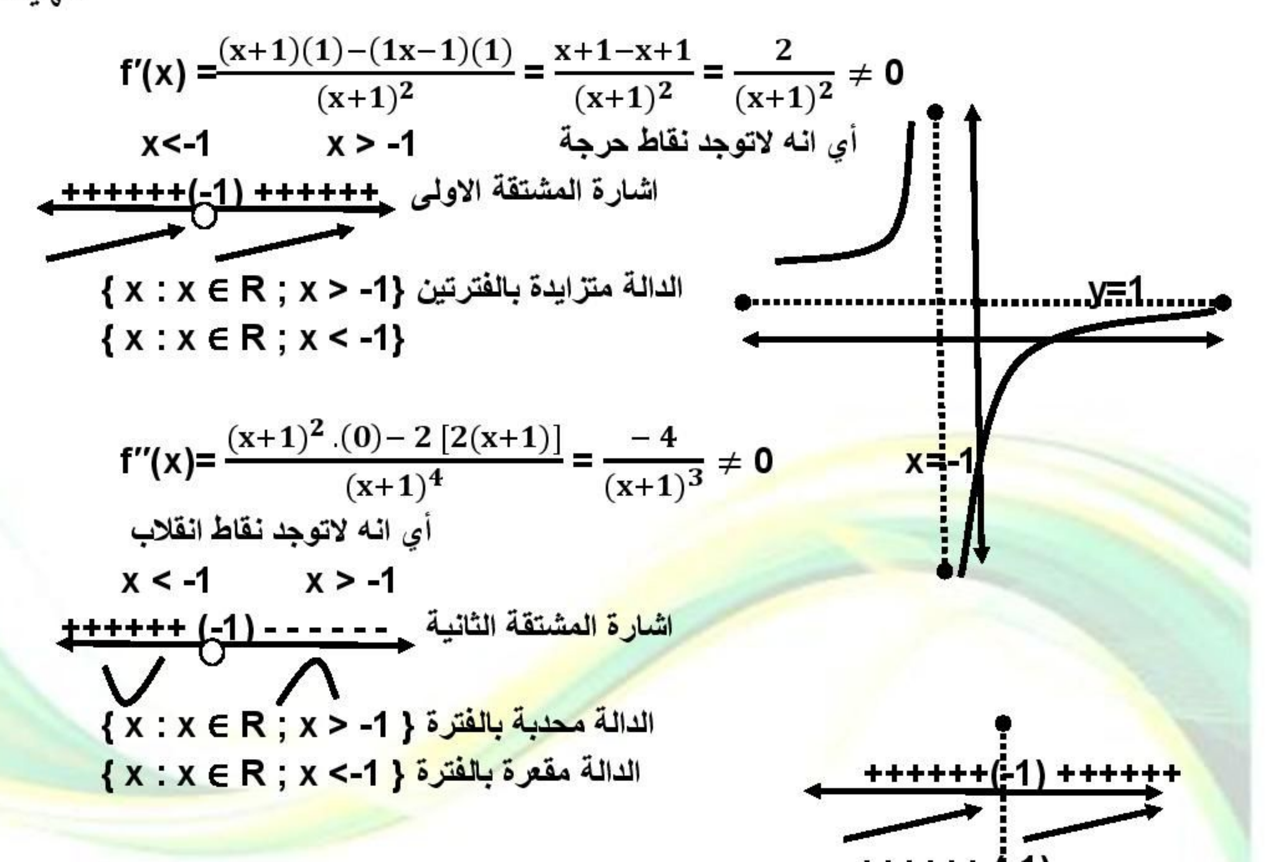
if $x = 0 \Rightarrow y = -1$, if $y = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0, -1), (1, 0)$

❹ التناظر

بما ان العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد (1-) لاينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

❺ النهايات



$$f'(x) = \frac{(x+1)(1)-(1x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$$

أي انه لاتوجد نقاط حرجة

$x<-1 \quad x>-1$

اشارة المشتقة الاولى ++++++(-1) ++++++

الدالة متزايدة بالفترتين $\{x : x \in R ; x > -1\}$

$\{x : x \in R ; x < -1\}$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2 .(0) - 2\,[2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3} \neq 0$$

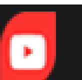
أي انه لاتوجد نقاط انقلاب

$x < -1 \quad x > -1$

اشارة المشتقة الثانية ++++++ (-1) - - - - - -

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x \in R ; x > -1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x \in R ; x < -1\}$



1997 دور 2
2007 تمهيدي

اذا كانت $f(x) = 3 + ax + bx^2$ تمتلك نقطة حرجة (1,4) جد قيمتي a,b الحقيقيتان ثم بين نوع النقطة الحرجة .

sol: $f(1)= 4$, $f'(1) = 0$ خطة عمل النقطة الحرجة

$f(x) = 3 + ax + bx^2 \Rightarrow 4 = 3 + a + b \Rightarrow a + b = 1$ .....(1)

$f'(x) = a + 2bx \Rightarrow 0 = a + 2b \Rightarrow a = -2b$ .... (2) in (1)

$-2b + b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$

$f''(x) = 2b = -2 < 0$ النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية

1998 دور 1

اذا كانت (1 , 6) نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = ax^2 + (x - b)^2$ جد قيمتي a,b

sol : $f(1) = 6 \Rightarrow 6 = a + (1 - b)^2 \Rightarrow 6 = a + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow a - 2b + b^2 = 5$ ...(1

$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2(x - b) \Rightarrow [\, 2a + 2(1 - b) = 0 \,] \div 2$

$a = b - 1$ .... (2 تعوض في (1)

$b - 1 - 2b + b^2 = 5 \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow (b - 3)(b + 2) = 0$

$b = 3 \Rightarrow a = 3 - 1 = 2$, $b = -2 \Rightarrow a = -2 - 1 = -3$

$f''(x) = 2a + 2$, $a=2 \Rightarrow f''(x) = 6 > 0$, $a= -3 \Rightarrow f''(x) = -4 < 0$ يهمل

$\{ a = 2 , b = 3 \}$ مجموعة الحل

2011 خارج القطر

اذا كانت (2 , 6) نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فجد قيمتي a , b ثم بين نوع النقطة الحرجة .

sol : $f(2) = 6 \Rightarrow 6 = a - (2 - b)^4$ ....(1)

$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = -4(x - b)^3 \Rightarrow -4(2 - b)^3 = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$ (in 1)

$6 = a - (2 - 2)^4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow f(x) = 6 - (x - 2)^4$

$f''(x) = -12(x - 2)^2 \Rightarrow f''(2) = -12(2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow$ هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة

$x < 2$ $x > 2$

++++++ (2) -------- $f'(x)$ اشارة $\Rightarrow$ (2 , 6) نقطة نهاية عظمى محلية

2009 دور 1

اذا كانت $(1 , -2)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = ax^2 - (x + b)^2$ جد قيمتي $a,b \in R^+$ ثم بين نوع النقطة الحرجة .

sol : $f(1) = -2 \Rightarrow -2 = a - (1 + b)^2 \Rightarrow -2 = a - (1 + 2b + b^2)$

$-2 = a - 1 - 2b - b^2 \Rightarrow a - 2b - b^2 = -1 \;...(1$

$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax - 2(x + b) \Rightarrow [\, 2a - 2(1 + b) = 0 \,] \div 2$

$a = b + 1 \;........ (2$ تعوض في (1)

$b + 1 - 2b - b^2 = -1 \Rightarrow b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b + 2)(b - 1) = 0$, either $b = -2$ يهمل

$b = 1 \Rightarrow a = 1 + 1 = 2$

$f''(x) = 2a - 2$, $a=2 \Rightarrow f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow (1 , -2)$ نهاية صغرى محلية

1999 دور 2

اذا كانت $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة $(-2 , -2)$ وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $b , c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية له .

sol : $\because (-2 , -2) \in f(x) \Rightarrow f(-2) = -2$, $\because x=1$ انقلاب $\Rightarrow f''(1) = 0$

$-8 - 4b - 2c = -2 \;......... (1$

$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c$, $f''(x) = 6x - 2b$

$\because f''(1) = 0 \Rightarrow 6 - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$ نعوض في المعادلة (1)

$-8 - 12 - 2c = -2 \Rightarrow -2c = 18 \Rightarrow c = -9$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow [3x^2 - 6x - 9 = 0] \div (3)$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 , f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$ OR $x = -1$, $f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

$(3 , -27) , (-1 , 5)$ نقاط حرجة

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0$, $f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$

$(3 , -27)$ نقطة نهاية صغرى محلية , $(-1 , 5)$ نقطة نهاية عظمى محلية

2014 دور 1

اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ يمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيم $a , b , c \in R$.

sol : $x = 3 \Rightarrow y + 27 = 28 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (3 , 1)$ نقطة تماس

$f(3) = 1 \Rightarrow 27a + 9b + c = 1$ .... (1

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(3) = 27a + 6b$

$f'(3) = m \Rightarrow 27a + 6b = -9$ .... (2

$f''(x) = 6ax + 2b$, $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ .... (3

$2b = -6a \Rightarrow b = -3a$ تعوض في (2)

$27a + (6)(-3a) = -9 \Rightarrow 27a - 18a = -9 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$

$b = (-3)(-1) = 3$ تعوض في المعادلة (1)

$-27 + 27 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

2000 دور 2

اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيم $a , b \in R$

تلميح \\ في هذا السؤال يمكن حله بدون الاستفادة من نقطة الانقلاب أي من خلال المعادلتين 2 , 1 فقط وإذا اضيف مجهول آخر للسؤال فيكون $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ فيجب الاستفادة من المعادلات الثلاث معا .

2009 دور 2

اذا كان المستقيم $y + 9x = 28$ يمس المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عند $(3 , 1)$ جد قيم $a , b \in R$.

sol : $m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم $\because$ $(3 , 1)$ نقطة تماس ⇨ $f(3) = 1$, $f'(3) = m$

$27a + 9b + 1 = 1$ ⇨ $3a + b = 0$ ⇨ $b = -3a$ .... (1

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(3) = 27a + 6b$

$\Rightarrow 27a + 6b = -9$ .... (2 ⇨ $27a - 18a = -9$ ⇨ $9a = -9$ ⇨ $a = -1$ ⇨ $b = 3$

2001 دور 1

اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -2$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 4$ جد قيمتي a , b .

sol : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-2) = 0 \ , f'(4) = 0$

$12 - 4a + b = 0$ .... (1

$48 + 8a + b = 0$ .... (2 $\Rightarrow b = -48 - 8a$ تعوض في (1)

$12 - 4a - 48 - 8a = 0 \Rightarrow -12a = 36 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -48 + 24 = -24$

2012 دور 1
2013 دور2
2008 خارج
2015 نازحين

اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ جد قيمتي a , b .

sol : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-1) = 0 \ , f'(2) = 0$

$3 - 2a + b = 0$ .... (1

$12 + 4a + b = 0$ .... (2 $\Rightarrow b = -12 - 4a$ تعوض في (1)

$3 - 2a - 12 - 4a = 0 \Rightarrow -6a = 9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -12 - 4(-\frac{3}{2}) = -12 + 6 = -6$

2003 دور 1

لتكن $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$ جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه .

sol: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1+3+9-6=5$

$(-1 , 5)$ نقطة انقلاب وتماس معا $\Rightarrow m = f'(-1) = 3 - 6 - 9 = -12$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ معادلة المماس $\Rightarrow (y - 5) = -12(x + 1)$

$y - 5 = -12x - 12 \Rightarrow 12x + y + 7 = 0$ معادلة المماس المطلوبة

2003 دور 2
2014 دور 4 انبار
2015 خارج دـ1
2016 دور اول

اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحي $f(x) = ax^2 + bx + c$ عند النقطة $(2 , -1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a , b , c \in R$.

sol : [$f(2) = -1$ لانها تماس , $f'(2) = m$ لانها تماس , $f'(\frac{1}{2}) = 0$ لانها صغرى

$$m = -\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$(2 , -1) \in f(x) \Rightarrow 4a + 2b + c = -1$ .... (1

$f'(x) = 2ax + b$, $\because f'(2) = m \Rightarrow 4a + b = 3$ .... (2

$\because f'(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a + b = 0$ .... (3 $\Rightarrow a = -b$ تعوض في المعادلة (2)

$-4b + b = 3 \Rightarrow -3b = 3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1$ تعوض قيمتيهما في المعادلة (1)

$4 - 2 + c = -1 \Rightarrow c = -3$

2015 دـ4 رصافة

اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحي $f(x) = ax^2 + bx + c$ عند النقطة $(2 , -1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = 5$ جد قيم $a , b , c \in R$.

2004 دور 1

اذا كان منحني الدالة $f(x) = 2ax^2 + b$ وكانت $a \in \{-1 , 0 , 1 , 3\}$ تمتلك نهاية عظمى محلية جد قيمة a .

sol: $f'(x) = 4ax \Rightarrow f''(x) = 4a$

$a = -1 \Rightarrow f''(x) = -4 < 0$ تمتلك نهاية عظمى محلية

2004 دور 2
2014 دور 3
2016 دور 2 خارج

جد معادلة المنحني $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ حيث ان النقطة $(-1 , 4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (1) .

sol : [$f(-1) = 4$ لانها تماس , $f'(-1) = 1$ لانها تماس , $f''(-1) = 0$ لانها انقلاب] خريطة عمل

$(-1 , 4) \in f(x) \Rightarrow -a - b - c = 4$ .... (1

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 1$ .... (2 بالجمع

$2a + b = 5$ .... (3

$f''(x) = 6ax - 2b \Rightarrow -6a - 2b = 0$ .... (4 $\Rightarrow 2b = -6a \Rightarrow b = -3a$ (in 3)

$2a - 3a = 5 \Rightarrow -a = 5 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow b = 15$ (in 1)

$5 - 15 - c = 4 \Rightarrow -c = 14 \Rightarrow c = -14$

$f(x) = -5x^3 - 15x^2 - 14x$

2005 دور 2

جد نقطة الانقلاب للمنحني $f(x) = (x-2)(x+1)^2$ ثم جد معادلة المماس له عند نقطة انقلابه

sol: $f(x) = (x-2)(x^2+2x+1)$

$f'(x) = (x-2)(2x+2) + (x^2+2x+1)(1) = 2x^2+2x-4x-4 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$ نقطة الانقلاب

$m = f'(x) = f'(0) = -3$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ معادلة المماس $\Rightarrow (y + 2) = -3(x - 0) \Rightarrow 3x + y + 2 = 0$

2006 تمهيدي
2008 دور 2

اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية صغرى محلية عند $x = 4$ ونقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $a, b \in R$.

sol : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(4) = 0$

$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0$

$48 + 8a + b = 0$ …….. (1

$6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$ نعوض في (1)

$48 - 24 + b = 0 \Rightarrow b = -24$

2005 دور 1

لتكن $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ وكانت (-1,2) نهاية عظمى محلية للدالة جد قيمتي $c, d \in R$ هل توجد نقطة انقلاب للدالة .

sol: $f(-1) = 2$, $f'(-1) = 0$ خطة عمل النقطة الحرجة

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1 \Rightarrow 2 = -1 + b - c + 1 \Rightarrow b - c = 2$ …..(1)

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow 0 = 3 - 2b + c \Rightarrow c = 2b - 3$ …. (2) in (1)

$b - (2b - 3) = 2 \Rightarrow b - 2b + 3 = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = 2 - 3 = -1$

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

$f(x) = \frac{-1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3+9+27}{27} = \frac{38}{27} \Rightarrow \left(\frac{-1}{3}, \frac{38}{27}\right)$ نقطة انقلاب مرشحة

---------- $\left(\frac{-1}{3}\right)$ +++++++ اشارة المشتقة الثانية $\Rightarrow \left(\frac{-1}{3}, \frac{38}{27}\right)$ نقطة انقلاب

2007 دور 1

اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2$ جد قيمتي $a, b \in R$ اذا علمت ان للمنحني نقطة انقلاب(1,2)

sol : : $f(1) = \Rightarrow 2 = a + b$ ……. (1

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ ……. (2 $\Rightarrow b = -3a$ تعوض في (1)

$2 = a - 3a \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1$ in (2) $\Rightarrow b = 3$

2008 دور 1
2015 دور 3

اذا كانت $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ حيث $a , x \neq 0$; $a \in R$ بين ان الدالة لاتمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة a .

sol : $f'(x) = 2x - ax^{-2} \Rightarrow 2x - ax^{-2} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{a}{x^2}$

$2x^3 = a \Rightarrow x^3 = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$

$f''(x) = 2 + 2ax^{-3} = 2 + \frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}) = 2 + \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 2 + (2a)(\frac{2}{a}) = 2 + 4 = 6 > 0$

∴ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن ان تمتلك نهاية عظمى محلية .

2013 دور 1

اذا كانت $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ حيث $a , x \neq 0$; $a \in R$ بين ان الدالة لاتمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة a .

نفس اسلوب حل السؤال السابق بفرق اشارة قيمة x

2008 دور 2

اذا كان المستقيم $x - y + 2 = 0$ يمس منحني القطع المكافئ $y^2 = h x$ جد بؤرة القطع المكافئ .

sol : $m_{\text{المستقيم}} = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{-1} = 1$

ميل المماس للمنحني (اذا مس او وازى مستقيم منحني تساوى ميلاهما) $2y\,y' = h \Rightarrow y' = \frac{h}{2y}$

تعوض بمعادلةالمستقيم $\frac{h}{2y} = 1 \Rightarrow h = 2y \Rightarrow y = \frac{h}{2}$ .... (1

(نعوض المعادلتين 1 ، 2 بمعادلة القطع المكافئ) $x - \frac{h}{2} + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{2} - 2$ ....(2

$(\frac{h}{2})^2 = h(\frac{h}{2} - 2) \Rightarrow [\frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2} - 2h] . (4) \Rightarrow h^2 = 2h^2 - 8h \Rightarrow h^2 - 8h = 0$

$h(h-8) = 0 \Rightarrow h = 0$ يهمل OR $h = 8$

بؤرة القطع المكافئ $(2 , 0) \Leftarrow p = 2 \Leftarrow 4p = 8 \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ $y^2 = 8x$, $y^2 = 4px$

2012 دور 3

اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة لكل $x > 1$ ومحدبة لكل $x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية $(-1 , 5)$ فجد قيم الثوابت $a , b , c \in R$.

2015 دور 1

2016 دور 1 خ

sol : خريطة عمل [لانها انقلاب $f''(1) = 0$, لانها عظمى $f'(-1) = 0$, لانها عظمى $f(-1) = 5$]

$\because (-1 , 5) \in f(x) \Rightarrow -a + b - c = 5$ .... (1

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $\because f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$ .... (2

$-a + b - c = 5$ .... (1

$3a - 2b + c = 0$ .... (2 بالجمع

$2a - b = 5$ .... (3

$f''(x) = 6ax + 2b$, $\because f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ .... (4

$2b = -6a \Rightarrow b = -3a$ (تعوض في المعادلة رقم 3)

$2a + 3a = 5 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3$ (تعوض قيمتيهما في المعادلة 1)

$-1 - 3 - c = 5 \Rightarrow c = -9$

2012 خارج القطر

اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه .

sol : $y = 6$

$f'(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0$

$x = 0$ OR $x = 2$

$f''(x) = 6 - 6x \Rightarrow f''(0) = 6 - 0 = 6 > 0$, $f''(2) = 6 - 12 = -6 < 0$

$(0 , 6)$ هي نقطة النهاية الصغرى $\in f(x)$

$6 = 0 - 0 + c \Rightarrow c = 6 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - x^3 + 6 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6 - 6x$

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 - 1 + 6 = 8 \Rightarrow (1 , 8)$ انقلاب مرشحة

+++++++ (1) - - - - - - - -

$\therefore (1 , 8)$ نقطة انقلاب

2013 تمهيدي

لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $a \in \{-4 , 8\}$ جد قيمة a اذا كانت الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية .

sol: $f'(x) = 2ax - 6 \Rightarrow f''(x) = 2a$

$a = 8 \Rightarrow f''(x) = 16 > 0$ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

2014 دور2

اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من g , f متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة f نقطة انقلاب هي (1 ، -11) فجد قيم الثوابت $a , b , c \in R$

خريطة عمل [لانها انقلاب $f''(1) = 0$, لانها تماس $f'(1) = m$, لانها تماس وانقلاب $f(1) = -11$] : sol

$\because f(1) = -11 \Rightarrow a + b + c = -11$ .... (1

$m = g'(x) = -12 \quad , \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\because f'(1) = m \Rightarrow 3a + 2b + c = -12$ .... (2

$\underline{\mp a \mp b \mp c = \pm 11}$ .... (1

$2a + b = -1$ ....(4)

$f''(x) = 6ax + 2b \quad , \quad \because f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ .... (3

$2b = -6a \Rightarrow b = -3a$ (تعوض في المعادلة 4)

$2a - 3a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3$ (تعوض قيمتيهما في المعادلة 1)

$1 - 3 + c = -11 \Rightarrow c = -9$

ملاحظة !! يمكن اعتبار المستقيم g(x)=1-12x بالصورة y=1-12x ثم حساب ميله عن طريق قانون ميل المستقيم ويصبح m= -12 بعد ان نجعل المتغيرين x , y بنفس الجهة علما ان الطالب مخير بين استخدام المشتقة او قانون ميل المستقيم

2015 دور 2 خارج
2015 دور2 داخل

اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $a , c \in R$.

sol : $y = 8$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow 3ax^2 + 6x = 0$ .... (1

$f''(x) = 6ax + 6 \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 6 = 0 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$)تعوض في المعادلة 1(

$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad OR \quad x = 2$

$f''(x) = -6x + 6 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0 \; , \; f''(2) = -12 + 6 = -6 < 0$

$f(2) = 8 \Rightarrow$ نقطة النهاية العظمى المحلية $(2 , 8)$

$-8 + 12 + c = 8 \Rightarrow c = 4$



الاسئلة الوزارية الخاصة بالتطبيقات العلمية



خطوات

1) نفرض المتغيرات باسماء معينة.
2) ايجاد علاقة بين المتغيرات بالاستفادة من أي عدد في السؤال لجعل احد المتغيرات بدلالة الآخر .
3) كتابة القاعدة (الدالة) الملازمة لكلمة اكبر او اصغر او احدى مرادفاتها .
4) وضع القاعدة (الدالة) بدلالة متغير واحد بالاستفادة من الخطوة (2) ، أي دمج (2) مع (3) .
5) اشتقاق القاعدة ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة لإيجاد قيمة المتغير الموحد .
6) الرجوع الى الخطوتين (2) ثم (1) والتعويض عن المعلوم لإيجاد المجهول .
7) عرض النتائج على خط الاعداد او المشتقة الثانية للتأكد من كون الناتج اكبر او اصغر مايمكن علما ان اغلب الاسئلة يتم اختيار القيمة المطلوبة الناتجة من الخطوة (5) ذهنيا دون الحاجة الى الخطوة (7)

1997 دور 2

في ظل الحصار الجائر المفروض على قطرنا المناضل صمم عامل بناء مبدع نموذجا لصندوق بضاعة على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل ومن غير غطاء فإذا كان حجمه $\frac{1}{16}\ m^3$ جد ابعاد الصندوق لتكون مساحة المادة المستخدمة في صناعته اقل مايمكن .

الحل \ نفرض ان طول ضلع القاعدة يساوي x ونفرض ان الارتفاع يساوي h

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2 h \Rightarrow \frac{1}{16} = x^2 h \Rightarrow 16x^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{16x^2}$$

لاحظ انه جعلنا h بدلالة x لكي نتجنب جذر الطرفين

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

ولأن الصندوق بدون غطاء لذا سوف نحذف الضعف من القانون وعليه سوف يكون

المساحة السطحية للصندوق = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحةالقاعدة

$$A = 4xh + x^2 \Rightarrow A = 4x\frac{1}{16x^2} + x^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}x^{-1} + x^2$$

$$A' = \frac{-1}{4}x^{-2} + 2x \quad , \because A' = 0$$

$$\frac{-1}{4}x^{-2} + 2x = 0 \Rightarrow [\frac{-1}{4x^2} + 2x = 0].4x^2 \Rightarrow -1 + 8x^3 = 0 \Rightarrow 8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \qquad \therefore h = \frac{1}{16x^2} = \frac{1}{16(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{16.\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

x

h

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي $\frac{1}{2}\ m$ وارتفاع الصندوق يساوي $\frac{1}{4}\ m$

وللتحقق من صحة الحل نحيل النتائج المستخرجة على خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية للتأكد من كونه اكبر (عظمى) اصغر (صغرى) مايمكن

$$A'' = \frac{1}{2}x^{-3} + 2 = \frac{1}{2x^3} + 2 \Rightarrow A''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2.\frac{1}{8}} + 2 = 6 > 0$$ (اقل مايمكن) نهاية صغرى

1998 دور 1
2016 دور 2

حاوية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة حجمها $216\pi\ cm^3$ جد ابعادها اذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل مايمكن ، مع العلم ان الحاوية مفتوحة من الاعلى .

الحل :- نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = x ، نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

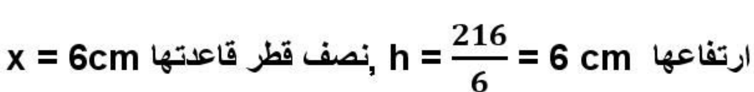
حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi x^2 h$

$216\pi = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{216}{x^2}$

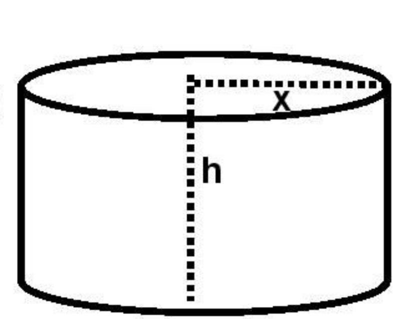
المساحة السطحية(بدون غطاء) = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة السطحية(بدون غطاء) = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$A = 2\pi x h + \pi x^2$



$A = 2\pi x (\frac{216}{x^2}) + \pi x^2 \Rightarrow A = \pi (432 x^{-1} + x^2)$



$A' = \pi (-432 x^{-2} + 2x)$

$[\frac{-432}{x^2} + 2x = 0] . x^2 \Rightarrow -432 + 2x^3 = 0$

$2x^3 = 432 \Rightarrow x^3 = 216$

$x = 6cm$ نصف قطر قاعدتها, $h = \frac{216}{6} = 6\ cm$ ارتفاعها

2000 دور 2

خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه $216\ m$ جد ابعاده لتكون مساحة الصفائح المستخدمة في صنعه اقل مايمكن .

الحل \ نفرض ان طول ضلع القاعدة يساوي x ونفرض ان الارتفاع يساوي h

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

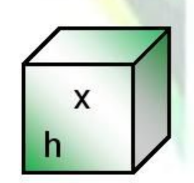
$V = x^2 h \Rightarrow 216 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{216}{x^2}$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × مساحةالقاعدة

$A = 4xh + 2x^2 \Rightarrow A = 4x \frac{216}{x^2} + 2x^2 \Rightarrow A = 864 x^{-1} + 2x^2$

$A' = -864 x^{-2} + 4x \quad , \because A' = 0$



$-864 x^{-2} + 4x = 0 \Rightarrow [\frac{-864}{x^2} + 4x = 0] . x^2$

$\Rightarrow -864 + 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 864$

$x^3 = 216 \Rightarrow x = 6 \quad \therefore h = \frac{216}{x^2} = \frac{216}{36} = 6$

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي $6\ m$ وارتفاع الصندوق يساوي $6\ m$ اي ان الشكل مكعبا

وللتحقق من صحة الحل نحيل النتائج المستخرجة على خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية للتأكد من كونه اكبر (عظمى) اصغر (صغرى) مايمكن

$A'' = 1728x^{-3} + 4 = \frac{1728}{x^3} + 4 \Rightarrow A''(6) = \frac{1728}{216} + 4 = 12 > 0$ (اقل مايمكن) نهاية صغرى

1999 دور 2

اذا كان نصف قطر كرة يساوي نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة وكان مجموع حجمي الكرة والاسطوانة يساوي $90\pi\ cm^3$ جد طول نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتيهما الكلية اصغر مايمكن .

الحل \ نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوي نصف قطر الكرة ويساوي r ، نفرض ارتفاع الاسطوانة h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع ، حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$[\,90\pi = \pi r^2 h + \frac{4\pi}{3} r^3\,] \cdot \frac{3}{\pi} \Rightarrow 270 = 3r^2 h + 4r^3$

$3r^2 h = 270 - 4r^3 \Rightarrow h = \frac{270-4x^3}{3x^2} \Rightarrow h = \frac{270}{3x^2} - \frac{4x^3}{3x^2} \Rightarrow h = 90r^{-2} - \frac{4}{3}r$

المساحة السطحية للاسطوانة A_1 = المساحة الجانبية + 2 × مساحة القاعدة

المساحة السطحية للكرة $A_2 = 4\pi r^2$

$A = A_1 + A_2 = (2\pi r h + 2\pi r^2) + 4\pi r^2 = 2\pi r h + 6\pi r^2$

$A = 2\pi(rh + 3r^2) \Rightarrow A = 2\pi[\,r(90r^{-2} - \frac{4}{3}r) + 3r^2\,]$

$A = 2\pi[\,90r^{-1} - \frac{4}{3}r^2 + 3r^2\,]$

$A' = 2\pi[\,-90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r\,]\ ,\ A' = 0$

$2\pi[\,-90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r\,] = 0 \Rightarrow -90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r = 0$

$[\,-\frac{90}{r^2} - \frac{8}{3}r + 6r = 0\,] \cdot 3r^2 \Rightarrow -270 - 8r^3 + 18r^3 = 0$

$10r^3 = 270 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3\ cm$ نصف قطر كل من الكرة والاسطوانة

2002 دور 2
2015 خارج دور 1

خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وله غطاء كامل ، جد ابعاد الخزان لتكون مساحة المادة المستعملة في صناعته اقل مايمكن علما ان سعة الخزان $27\ m^3$

الحل \ نفرض ان طول ضلع القاعدة يساوي x ونفرض ان الارتفاع يساوي h

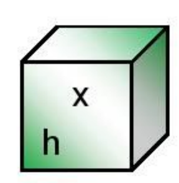
حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = x^2 h \Rightarrow 27 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{27}{x^2}$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × مساحةالقاعدة

$A = 4xh + 2x^2 \Rightarrow A = 4x\ \frac{27}{x^2} + 2x^2 \Rightarrow A = 108\ x^{-1} + 2x^2$



$A' = -108\ x^{-2} + 4x \quad , \because A' = 0$

$-108\ x^{-2} + 4x = 0 \Rightarrow [\frac{-108}{x^2} + 4x = 0] . x^2$

$\Rightarrow -108 + 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 108$

$x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 \qquad \therefore h = \frac{27}{x^2} = \frac{27}{9} = 3$

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي $3\ m$ وارتفاع الصندوق يساوي $3\ m$ اي ان الشكل مكعبا

وللتحقق من صحة الحل نحيل النتائج المستخرجة على خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية للتأكد من كونه اكبر (عظمى) اصغر (صغرى) مايمكن

$A'' = 216\ x^{-3} + 4 = \frac{216}{x^3} + 4 \Rightarrow A''(3) = \frac{216}{27} + 4 = 12 > 0$ (اقل مايمكن) نهاية صغرى

2001 دور 1
2004 دور 2

جد بعدي علبة اسطوانة دائرية قائمة مسدودة من نهايتيها ، مساحتها السطحية $24\pi\ cm^2$ عندما يكون حجمها اكبر مايمكن .

الحل \ نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة r وارتفاعها h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة السطحية للاسطوانة = المساحة الجانبية + 2 × مساحة القاعدة

المساحة السطحية للاسطوانة = (محيط القاعدة × الارتفاع) + 2 × مساحة القاعدة

$[24\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2] \div 2\pi \Rightarrow 12 = rh + r^2 \Rightarrow rh = 12 - r^2$

$h = \frac{12 - r^2}{r}$

$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 . (\frac{12 - r^2}{r}) = \pi(12r - r^3)$

$V' = \pi(12 - 3r^2) \quad , V' = 0 \Rightarrow \pi(12 - 3r^2) = 0 \Rightarrow 3r^2 = 12$

$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2\ cm$ نصف قطر الاسطوانة $\Rightarrow h = \frac{12 - 4}{2} = 4\ cm$ ارتفاع الاسطوانة

وللتحقق من صحة الحل نعرض النتائج على المشتقة الثانية ويجب ان تكون اشارتها موجبة اي ان النهاية عظمى

$V'' = \pi(-6r) \Rightarrow v''(2) = -12\pi < 0$ اي ان الحجم يكون اكبر مايمكن

2004 دور 1

قطعة سلك طولها 8 cm قطعت الى قطعتين صنع من الاولى دائرة ومن الثانية مستطيل طوله ضعف عرضه ، جد طول كل قطعة ليكون مجموع مساحتي المستطيل والدائرة اقل مايمكن .

الحل \ نفرض ان طول المستطيل x وعرضه y بحيث ان $x = 2y$ ونفرض ان نصف قطر الدائرة r

بما ان طول قطعة السلك 8 امتار وقطعت الى قطعتين فإن مجموع محيطي القطعتين هي نفسها طول السلك وعليه تكون العلاقة في السؤال هي مجموع المحيطين والقاعدة التي يتم اشتقاقها مجموع المساحتين

$$2(2y + y) + 2\pi r = 8 \Rightarrow 6y + 2\pi r = 8 \Rightarrow 3y + \pi r = 4$$

$$3y = 4 - \pi r \Rightarrow y = \frac{1}{3}(4 - \pi r)$$

$$A = 2y(y) + \pi r^2 \Rightarrow A = \frac{2}{9}(4 - \pi r)^2 + \pi r^2 \Rightarrow A = \frac{2}{9}(16 - 8\pi r + \pi^2 r^2) + \pi r^2$$

$$A' = \frac{2}{9}(-8\pi + 2\pi^2 r) + 2\pi r \Rightarrow \left[\frac{2}{9}(-8\pi + 2\pi^2 r) + 2\pi r = 0\right] \cdot \frac{9}{2\pi}$$

$$-8 + 2\pi r + 9r = 0 \Rightarrow r(2\pi + 9) = 8 \Rightarrow r = \frac{8}{2\pi+9}$$

$$y = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{8\pi}{2\pi+9}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8\pi+36-8\pi}{\pi+9}\right) = \frac{12}{2\pi+9}$$

$6y = \frac{72}{2\pi+9}$ محيط المستطيل والذي يمثل طول القطعة الاولى

$2\pi r = \frac{16\pi}{2\pi+9}$ محيط الدائرة والذي يمثل طول القطعة الثانية

$A'' = \frac{2}{9}(2\pi^2) + 2\pi > 0$ اي ان مجموعة المساحتين في نهايته الصغرى (اصغر مايمكن)

2013 دور 3
2015 دور3

مجموع محيطي دائرة ومربع 60 cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر مايمكن فان طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

الحل :- نفرض ان طول ضلع المربع = x ، نفرض ان طول نصف قطر الدائرة = y

العلاقة مجموع المحيطين والقاعدة مجموع المساحتين

$$4x + 2\pi y = 60 \Rightarrow 2x + \pi y = 30 \Rightarrow 2x = 30 - \pi y \Rightarrow x = 15 - \frac{\pi}{2}y$$

$$A = x^2 + \pi y^2 \Rightarrow A = (15 - \frac{\pi}{2}y)^2 + \pi y^2 \Rightarrow A = 225 - 15\pi y + \frac{\pi^2}{4}y^2 + \pi y^2$$

$$A' = -15\pi + \frac{\pi^2}{2}y + 2\pi y \Rightarrow \left[-15\pi + \frac{\pi^2}{2}y + 2\pi y = 0\right] \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$-30 + \pi y + 4y = 0 \Rightarrow (4 + \pi)y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{(4+\pi)}$$

$$x = 15 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{30}{(4+\pi)}\right) = 15 - \frac{15\pi}{(4+\pi)} = \frac{15\pi + 60 - 15\pi}{(4+\pi)} \Rightarrow x = \frac{60}{(4+\pi)}$$

$2y = x = \frac{60}{(4+\pi)}$ أي ان

$A'' = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0$ اي ان للدالة نهاية صغرى محلية والجواب هو اصغر مايمكن

تلميح \\ يمكنك ان تراجع اسلوب حل الكتاب للمثال حيث بدأ الحل بأن يجعل نصف القطر بدلالة طول ضلع المربع ، حاول ذلك قبل ان تطلع على حل الكتاب .

2005 تمهيدي

برهن ان اكبر مستطيل محيطه 40 cm يكون مربعا

الحل \ نفرض ان بعدي المستطيل x , y

محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض) $40 = 2(x + y) \Rightarrow 20 = x + y \Rightarrow x = 20 - y$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = x . y$

$A = (20 - y) y = 20y - y^2$

$A' = 20 - 2y \quad , \quad A' = 0 \Rightarrow 20 - 2y = 0 \Rightarrow y = 10$

بما ان البعدين متساويين فإن المستطيل المطلوب مربعا $x = 20 - 10 = 10$

اي ان المستطيل يكون مربعا عندما يكون في نهايته العظمى (مساحته اكبرمايمكن) $A'' = -2 < 0$

2010 تمهيدي

جد ابعاد مستطيل محيطه 100 سم ومساحته اكبر مايمكن .

الحل \ نفرض ان بعدي المستطيل x , y

محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض) $100 = 2(x + y) \Rightarrow 50 = x + y \Rightarrow x = 50 - y$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = x . y$

$A = (50 - y) y = 50y - y^2$

$A' = 50 - 2y \quad , \quad A' = 0 \Rightarrow 50 - 2y = 0 \Rightarrow y = 25cm$

بما ان البعدين متساويين فإن المستطيل المطلوب مربعا $x = 50 - 25 = 25cm$

اي ان المستطيل يكون مربعا عندما يكون في نهايته العظمى (مساحته اكبرمايمكن) $A'' = -2 < 0$

تلميح \\ لو وجدت قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها واريد تسييجها بسياج طوله 100 متر مثلا فللحصول على اكبر مساحة لهذا المستطيل تكون العلاقة (محيط المستطيل ناقص ضلع $100 = 2x + y$)

2005 دور 1
2006 دور 2
2014 تمهيدي

جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $16 \ cm^2$

الحل \\ نفرض ان طول المستطيل x ، عرض المستطيل y

مساحة المستطيل = الطول × العرض $16 = x\,y \Rightarrow y = \frac{16}{x}$

محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض) $P = 2 (x + y)$

$P = 2(x + \frac{16}{x}) = 2 (x + 16x^{-1})$

$P' = 2(1 - 16x^{-2}) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$y = \frac{16}{4} = 4$

$P = 2(4 + 4) = 16 \ cm$

$p'' = 2(32x^{-3}) = \frac{64}{x^3} \Rightarrow p''(4) = 1 > 0$ اي ان المحيط في نهايته الصغرى (اقل محيط ممكن)

2005 دور 2

صفيحة مستوية معدنية مربعة الشكل طول ضلعها 60 cm قطعت من اركانها الاربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الاجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع لكي يكون حجم العلبة اكبر مايمكن .

الحل :- نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع = x

بعد ثني الاجزاء البارزة تكونت علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة طول ضلع القاعدة يساوي $60 - 2x$ وارتفاعها يساوي x

حجم متوازي المستطيلات V = مساحة القاعدة × الارتفاع

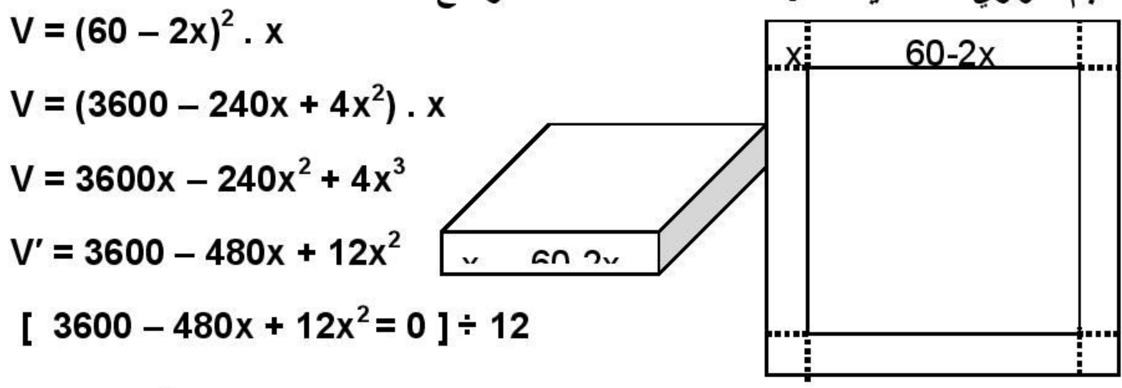
$$V = (60 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V = (3600 - 240x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 3600x - 240x^2 + 4x^3$$

$$V' = 3600 - 480x + 12x^2$$

$$[\ 3600 - 480x + 12x^2 = 0\ ] \div 12$$



$$300 - 40x + x^2 = 0 \Rightarrow (30 - x)(10 - x) = 0$$

$x = 30$ اما (يهمل ذهنيا) OR $x = 10$ (طول ضلع المربع المقطوع)

$V'' = -480 + 24x \Rightarrow V''(10) = -480 + 240 = -240 < 0$ الحجم اكبر مايمكن

2009 تمهيدي

صفيحة مستوية معدنية مستطيلة الشكل بعديها 80 cm , 50 cm قطعت من اركانها الاربعة مربعات متساوية المساحة ثم ثنيت الاجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع لكي يكون حجم العلبة اكبر مايمكن .

الحل \ نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع x

في العلبة الناتجة يكون طول ضلع القاعدة 80-2x وعرضها 50-2x وارتفاعها x

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = (80-2x)(50-2x)(x) = (4000 - 160x - 100x + 4x^2)\ x$$

$$= (4000 - 260x + 4x^2)\ x = (4000x - 260x^2 + 4x^3)$$

$$V' = 4000 - 520x + 12x^2 \quad , v' = 0 \Rightarrow [4000 - 520x + 12x^2 = 0\ ] \div 4$$

$$1000 - 130x + 3x^2 = 0 \Rightarrow (100 - 3x)(10 - x) = 0$$

either $x = \frac{100}{3}$ يهمل ذهنيا لانه اكبر من نصف العرض OR $x = 10$ cm طول ضلع المربع المقطوع

$V'' = -520 + 24x \Rightarrow V''(10) = -520 + 240 < 0$ الحجم اكبر مايمكن

2007 تمهيدي

جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر مايمكن

الحل :- نفرض العدد x ومربعه x^2

$$h = x - x^2$$

$$h' = 1 - 2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$h'' = -2 < 0 \Rightarrow$ العدد الناتج هو اكبر مايمكن

عزيزي الطالب \ قد يحور السؤال السابق ليكون جد العدد الذي نقصانه على مربعه اصغر مايكمن فتكون القاعدة $h = x^2 - x$ عندها ستكون المشتقة الثانية في نهايتها الصغرى

2014 دور 3
2013 خارج القطر

جد العدد الذي اذا اضيف الى نظيره الضربي يكون الناتج اكبر مايمكن

الحل \ نفرض ان العدد x ونظيره الضربي $\frac{1}{x}$

$$A = x + \frac{1}{x} \Rightarrow A = x + x^{-1}$$

$$A' = 1 - x^{-2} \Rightarrow [\,1 - \frac{1}{x^2} = 0\,] . x^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$A'' = 2x^{-3} \Rightarrow A'' = \frac{2}{x^3}$$

$A''(1) = 2 > 0$ (اصغر مايمكن) في نهايته الصغرى

$A''(-1) = -2 < 0$ (اكبر مايمكن) في نهايته العظمى

اي ان العدد المطلوب يساوي (-1)

تلميح \\ هذا الحل هو الذي يعتمد في الجواب النموذجي ومايريده واضع السؤال ولكن السؤال لايخلو من خلل لغوي لان الاختبار اظهر ان العدد 1- هو اكبر عدد مطلوب لكن عند اجراء اختبار على العدد 1 مثلا نجد ان ناتج اضافته الى نظيره الضربي ينتج عنه 2 وهو اكبر من ناتج اضافة 1- الى نظيره الضربي وهو 2- وان كل الاعداد الموجبة الاخرى تظهر نتائج اكبر من ذلك لذا فان السؤال بوضعه اللفظي الحالي يخالف المنطق الرياضي ولتدارك هذا الخلل يجب ان يكون السؤال باحدى الصيغتين التاليتين

جد اكبر عدد سالب عند اضافته الى نظيره الضربي يكون الناتج في نهايته العظمى

جد اصغر عدد موجب عند اضافته الى نظيره الضربي يكون الناتج في نهايته الصغرى

2014 دور 4 انبار

جد العددين الموجبين اللذين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر مايمكن

الحل :- نفرض العدد الاول x ونفرض العدد الثاني y

$x + y = 75 \Rightarrow x = 75 - y$

$h = x\,y^2 \Rightarrow h = (75 - y)\,y^2 = 75y^2 - y^3$

$h' = 150y - 3y^2 \Rightarrow 150y - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y(50 - y) = 0$

$y = 0$ يهمل OR $y = 50$

$x = 75 - 50 = 25 \Rightarrow \{50 , 25\}$ العددان هما

$h'' = 150 - 6y \Rightarrow h''(50) = 150 - 300 = -150 < 0 \Rightarrow$ الجواب يمثل اكبر مايمكن

2002 دور 1

لتكن $y^2 = 8x$ جد نقطة تنتمي الى المنحني وتكون اقرب مايمكن الى النقطة $(6,0)$.

الحل :- نفرض النقطة $p(x , y)$

$y^2 = 8x \Rightarrow$

$P = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2}$

$P = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2}$

$P = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x} = \sqrt{x^2 - 4x + 36}$

$P' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} \Rightarrow \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

$\{(2 , 4) , (2 , -4)\}$ مجموعة الحل

2008 تمهيدي

اذا كان $y + 4x = 24$ فجد قيمتي x , y التي تجعل $y\,x^2$ اكبر مايمكن .

$y + 4x = 24 \Rightarrow y = 24 - 4x$

$A = y\,x^2$

$A = (24 - 4x)x^2 \Rightarrow A = 24x^2 - 4x^3$

$A' = 48x - 12x^2 \Rightarrow 12x(4 - x) = 0$

either $x = 0$ تهمل

or $x = 4 \Rightarrow y = 24 - 16 = 8$

$A'' = 48 - 24x \Rightarrow A''(4) = 48 - 96 = -48$ اي ان القيم الناتجة في نهايتها العظمى

2011 دور 2
2013 دور1
2012 تمهيدي
2015 دور2 خ
2016 دور2 خ

جد نقطة او اكثر تنتمي الى القطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون اقرب مايمكن الى النقطة (0,4)

نفرض النقطة $p(x , y)$

$y^2 - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = y^2 - 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 3}$

$P = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2}$

$P = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$

$P = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$

$P' = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} \Rightarrow \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0 \Rightarrow 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$

$x = \pm\sqrt{4 - 3} \Rightarrow x = \pm 1$

مجموعة الحل $\{ (1 , 2) , (-1 , 2) \}$

2015 دور 2

جد نقطة تنتمي الى المنحني $y^2 - x^2 = 5$ لكي تكون اقرب مايمكن من النقطة $(4 , 0)$

ans: $(2 , 3) , (2 , -3) \in$ المنحني

2012 دور 2
2007 خارج القطر

جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات بحيث ان رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ثم جد محيطه .

الحل :- نفرض ان العرض = $2x$ والطول = y (لأن المنحني متناظر حول محور الصادات)

$y = 12 - x^2$

$A = 2x . y$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2x(12 - x^2) \Rightarrow A = 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2 \Rightarrow 24 - 6x^2$

$6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$y = 12 - 4 \Rightarrow y = 8$

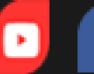
$2x = 4$ العرض , $y = 8$ الطول

$M = (y + 2x) . 2$ محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض)

$M = (8 + 4)(2) = 24$ وحدة طول

س// مثلث متساوي الساقين abc فيه bc يوازي محور السينات من الاعلى a ، تقع على نقطة الاصل ، b , c ينتميان الى المنحني $y = 12 - x^2$ جد اكبر مساحة لسطح المثلث .

الجواب /// {16} وحدة مربعة



1999 دور 1

جد ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية اكبر مايمكن موضوعة داخل كرة مجوفة نصف قطرها $6\sqrt{2}\ cm$

الحل :- نفرض ان نصف قطر الاسطوانة x ، نفرض ارتفاع الاسطوانة 2h

$(6\sqrt{2})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 72 = x^2 + h^2$

$x^2 = 72 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{72 - h^2}$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$A = 2\pi\ x\,(2h) = 4\pi\ xh$

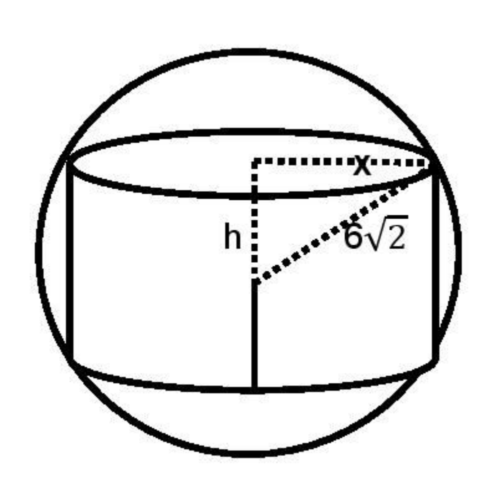
$A = 4\pi\ h\sqrt{72 - h^2} \Rightarrow A = 4\pi\ \sqrt{h^2}\sqrt{72 - h^2}$

$A = 4\pi\ \sqrt{72h^2 - h^4}$

$A' = 4\pi\ \frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} \Rightarrow 4\pi\ \frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} = 0$

$144h - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h\,(36 - h^2) = 0$

$h^2 = 36 \quad \Rightarrow h = 6$



$x^2 = 72 - 36 = 36 \Rightarrow x = 6$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة $\Rightarrow 2h = 12$ ارتفاع الاسطوانة

تلميح \\ لاحظ ان القاعدة التي تم اشتقاقها هي المساحة الجانبية للاسطوانة ، فلو كان السؤال جد المساحة الجانبية لأكبر اسطوانة دائرية توضع داخل كرة نصف قطرها $6\sqrt{2}$ لكانت القاعدة قانون حجم الاسطوانة وبعد ايجاد الابعاد نعوضها بقانون المساحة الجانبية

2001 دور 2

جد بعدي اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها $2\sqrt{3}\ cm$

الحل :- نفرض ان نصف قطر الاسطوانة x ، نفرض ارتفاع الاسطوانة 2h

$(2\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 12 = x^2 + h^2$

$x^2 = 12 - h^2$

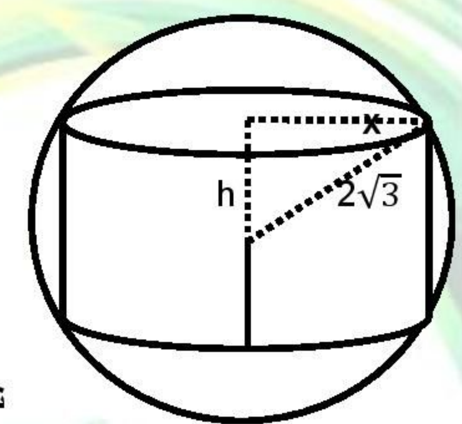
حجم الاسطوانية = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \pi\ x^2\,(2h) = 2\pi\ x^2 h$

$V = 2\pi\ h(12 - h^2) \Rightarrow V = 2\pi\ (12h - h^3)$

$V' = 2\pi\ (12 - 3h^2) \Rightarrow 2\pi\ (12 - 3h^2) = 0$

$12 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = 12 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$

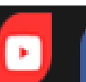


$x^2 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$2h = 4$ ارتفاع الاسطوانة



تلميح \\ لو طلب ايجاد بعدي اكبر اسطوانة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها معلوم عندها سنفرض ان نصف قطر الكرة a ونكمل الحل حسب ماتقدم ويكون الجواب النهائي بدلالة a



2012 دور 3

جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها $4\sqrt{3}\ cm$

الحل :- نفرض ان نصف قطر الاسطوانة x ، نفرض ارتفاع الاسطوانة 2h

$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 48 = x^2 + h^2$

$x^2 = 48 - h^2$

حجم الاسطوانية = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \pi\ x^2 (2h) = 2\pi\ x^2 h$

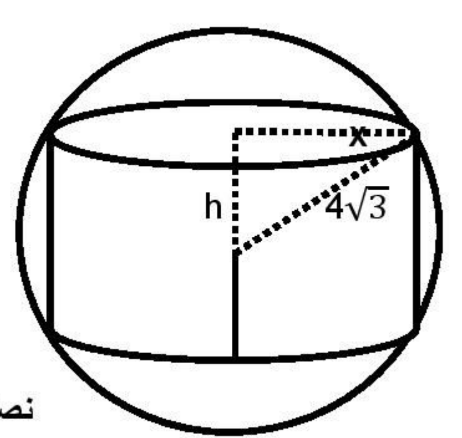
$V = 2\pi\ h(48 - h^2) \Rightarrow V = 2\pi\ (48h - h^3)$

$V' = 2\pi\ (48 - 3h^2) \Rightarrow 2\pi\ (48 - 3h^2) = 0$

$48 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = 48 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$

$x^2 = 48 - 16 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$2h = 8$ ارتفاع الاسطوانة



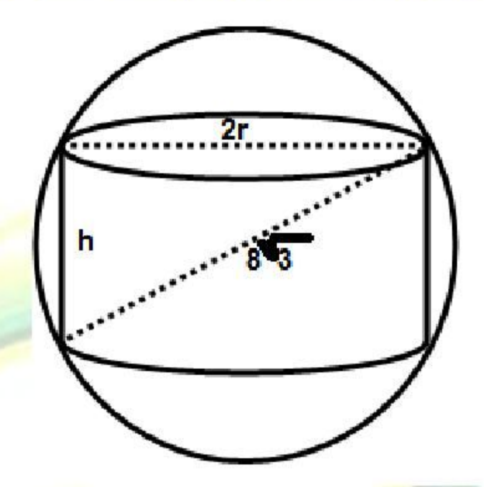
تأكيد \\ اكبر اسطوانة توضع داخل كرة يكون مركز الكرة منصف لارتفاع الاسطوانة وعليه فرضنا الارتفاع 2h لاننا سنحتاج الى احد القسمين لرسم المثلث القائم الزاوية . ويمكن استبدال الرسم بالشكل التالي فتتغير الفرضية

في هذه الحالة نبقي الارتفاع h لان القطر الكامل هو الذي يكون المثلث القائم وعليه ستكون العلاقة في السؤال

$128 = h^2 + (2r)^2 \Rightarrow 128 = h^2 + 4r^2$

$r^2 = \frac{1}{4}(128 - h^2)$

$v = \pi r^2 h$ اكمل الحل وسترى نفس النتائج



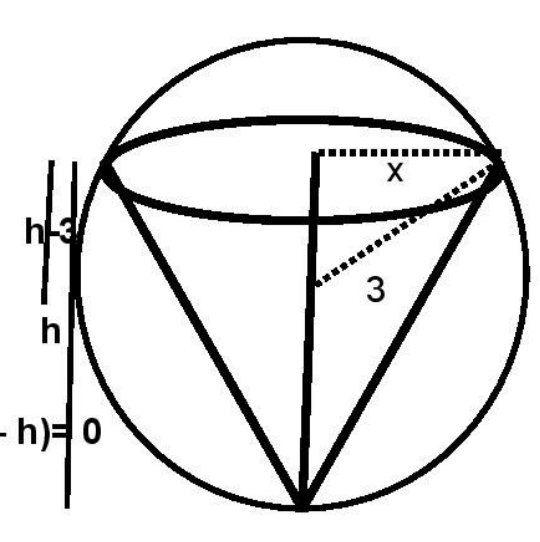
2008 دور 1

جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة مجوفة نصف قطرها 3 cm .

ان نصف قطر قاعدة المخروط x ، ارتفاع المخروط h



$9 = x^2 + (h-3)^2 \Rightarrow 9 = x^2 + h^2 - 6h + 9$



$x^2 = 6h - h^2$

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}(6h - h^2)h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0 \Rightarrow 12h - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h(4-h) = 0$

either $h = 0$ يهمل

OR $h = 4 \Rightarrow x^2 = 24 - 16 = 8$

$V = \frac{\pi}{3}(8)(4) = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$

2016 تمهيدي

جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}$ cm .

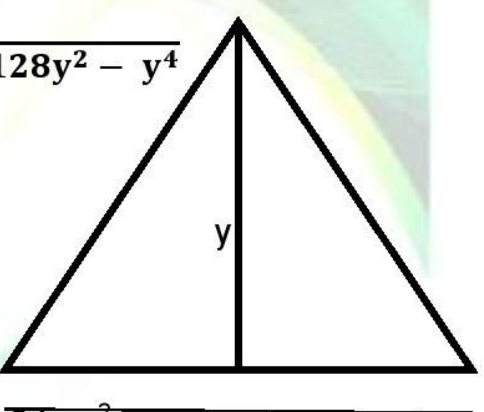
الحل :- نفرض ان طول القاعدة = 2x ، الارتفاع = y

$(8\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 128 = x^2 + y^2$

$x^2 = 128 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{128 - y^2}$

$A = \frac{1}{2} 2x \cdot y$ مساحة المثلث = نصف طول القاعدة × الارتفاع

$A = y\sqrt{128 - y^2} \Rightarrow A = \sqrt{y^2}\sqrt{128 - y^2} \Rightarrow A = \sqrt{128y^2 - y^4}$



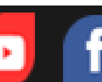
$A' = \frac{(256y - 4y^3)}{2\sqrt{128y^2 - y^4}} = 0$

$256y - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y(64 - y^2) = 0$

$4y = 0 \Rightarrow y = 0$ يهمل OR $y^2 = 64 \Rightarrow y = 8$

$x = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$

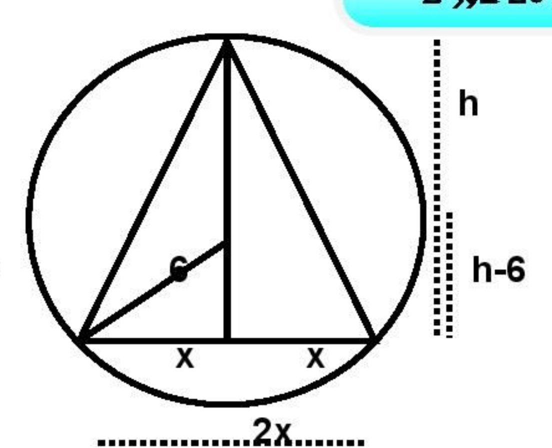
$2x = 16cm$ طول القاعدة , $y = 8$ cm الارتفاع , $A = 64cm^2$



2003 دور 1
2006 تمهيدي
2010 دور 2

جد مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 6 cm .

الحل :- نفرض ان طول قاعدة المثلث = 2x ، ارتفاع المثلث = h



$(6)^2 = x^2 + (h-6)^2$

$36 = x^2 + h^2 - 12h + 36$

$x^2 = 12h - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{12h - h^2}$

$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$ مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$A = h\sqrt{12h - h^2}$

$A = \sqrt{h^2}\sqrt{12h - h^2} = \sqrt{12h^3 - h^4}$; $h > 0$

$A' = \frac{36h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0 \Rightarrow 36h^2 - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h^2(9-h) = 0$

$4h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ يهمل OR $9 - h = 0 \Rightarrow h = 9$ cm

$x = \sqrt{108 - 81} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow 2x = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm طول القاعدة

$A = 27\sqrt{3}$ cm^2

2012 خارج القطر

جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن وضعه داخل دائرة نصف قطرها 12 cm

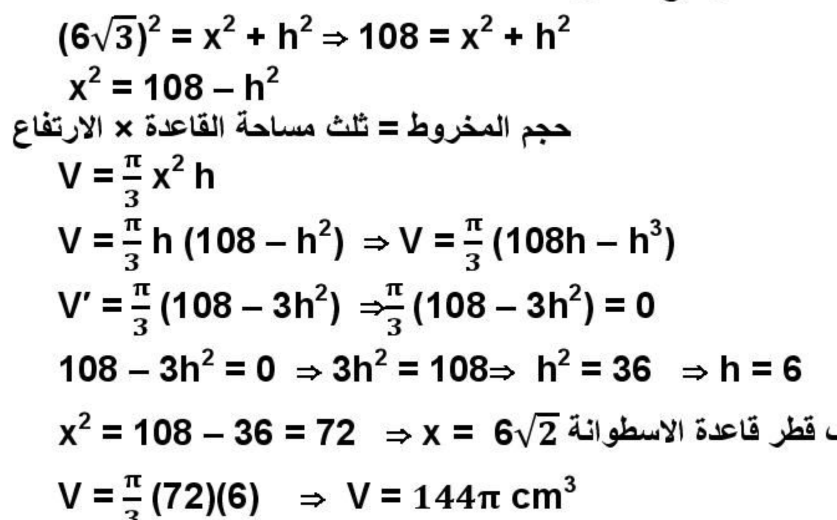
نفس فكرة السؤال السابق

2011 دور 1
2014 دور 1

مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\ cm$ ادير حول احد ضلعيه القائمين فتكون مخروط دائري قائم ، جد طولي الضلعين القائمين بحيث يكون حجم المخروط المتكون اكبر ما يمكن .

الحل :- عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x ، ارتفاع المخروط = h



$(6\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 108 = x^2 + h^2$

$x^2 = 108 - h^2$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$

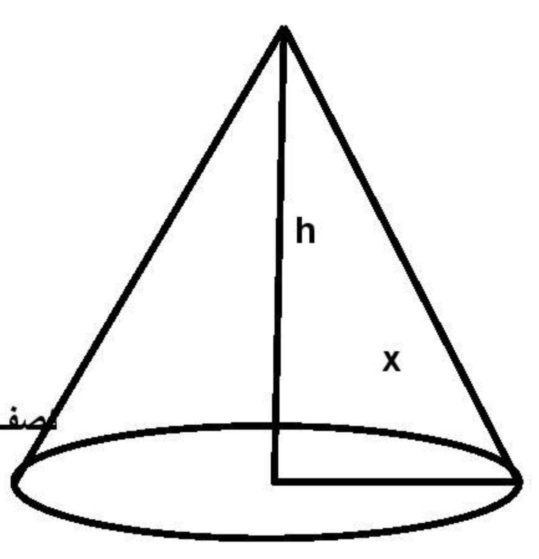
$V = \frac{\pi}{3} h (108 - h^2) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0$

$108 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = 108 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$

$x^2 = 108 - 36 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$V = \frac{\pi}{3}(72)(6) \Rightarrow V = 144\pi\ cm^3$



2006 دور 1

مخروط دائري قائم طول مولده $9\sqrt{3}\ cm$ جد ارتفاع هذا المخروط لكي يكون حجمه اكبر مايمكن

2009 دور 2

مثلث قائم الزاوية طول وتره $4\sqrt{3}\ cm$ ادير حول احد ضلعيه القائمين فتكون مخروط دائري قائم ، جد طولي الضلعين القائمين بحيث يكون حجم المخروط المتكون اكبر ما يمكن .

تلميح \\ فكرة هذا السؤال ترددت في اربع نماذج وزارية باختلاف طول المولد او الوتر في المثلث القائم مع التأكيد ان المثلث القائم الزاوية اذا ادير حول احد ضلعيه القائمين فان الشكل المتكون هو مخروط اما المربع اذا ادير حول احد اضلاعه الاربعة فان الشكل المتكون هو اسطوانة ارتفاعها يساوي طول نصف قطر قاعدتها ، اما المستطيل اذا ادير حول احد اضلاعه فان الشكل المتكون هو اسطوانة .

2012 دور 1
2013 تمهيدي

جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$cm

الحل :- نفرض ان الطول = 2x والعرض = y

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x , y مثلث قائم الزاوية

$(4\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 32 = x^2 + y^2$

$x^2 = 32 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{32 - y^2}$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = 2x \, . \, y$

$A = 2y\sqrt{32 - y^2} \Rightarrow A = 2\sqrt{y^2}\sqrt{32 - y^2} \Rightarrow A = 2\sqrt{32y^2 - y^4}$

$A' = \frac{2\,(64y - 4y^3)}{2\sqrt{32y^2 - y^4}} = 0$

$64y - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y(16 - y^2) = 0$

$4y = 0 \Rightarrow y = 0$ يهمل OR $y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$

$x = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$

$2x = 8$cm الطول , $y = 4$cm العرض

2009 دور 1
2015 د4 رسالة

جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها 6 cm. **نفس الاسلوب**

تأكيد \\ لو ان المستطيل يرسم داخل دائرة كاملة سنفرض بعديه 2x , 2y وتكون مساحته تساوي $A = 2x.2y = 4xy$

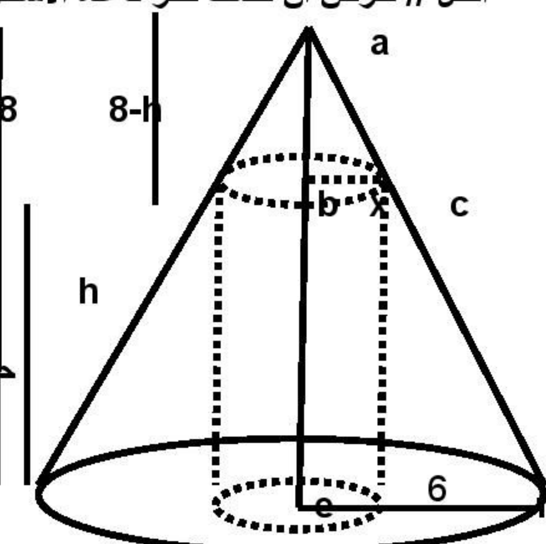
2016 دور 1 خ

جد مساحة اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها 8 cm .

1997 دور اول

جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 سم ونصف قطر قاعدته 6 سم .

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h



من تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{x}{6} = \frac{8-h}{8}$$

$8x = 6(8-h) \Rightarrow 4x = 24 - 3h$

$3h = 24 - 4x \Rightarrow h = \frac{1}{3}(24 - 4x)$

حجم الاسطوانية = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi x^2 h$

$V = \pi x^2 \frac{1}{3}(24 - 4x) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(24x^2 - 4x^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(48x - 12x^2) \Rightarrow 48x - 12x^2 = 0$

$12x(4 - x) = 0$

$12x = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل OR $x = 4cm \Rightarrow h = \frac{1}{3}(24 - 16) = \frac{8}{3}$ cm

المساحة السطحية = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × مساحة القاعدة $A = 2\pi x h + 2\pi x^2$

$A = 2\pi(4)(\frac{8}{3}) + 2\pi(4)^2 = \frac{160}{3}\pi \ cm^2$

تلميح \\ السؤال الوزاري الاصلي فيه نصف القطر 9 وارتفاع المخروط 12 تم استبدال القيم لينطبق مع سؤال التمارين في الكتاب المنهجي .

2015 تمهيدي د1

جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6cm وطول قطر قاعدته يساوي 8cm .

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h

من تشابه المثلثين abc , adf

$$\frac{x}{4} = \frac{6-h}{6}$$

$6x = 4(6-h) \Rightarrow 6x = 24 - 4h$

$4h = 24 - 6x \Rightarrow h = \frac{1}{2}(12 - 3x)$

حجم الاسطوانية = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi x^2 h$

$V = \pi x^2 \frac{1}{2}(12 - 3x) \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}(12x^2 - 3x^3)$

$V' = \frac{\pi}{2}(24x - 9x^2) \Rightarrow 24x - 9x^2 = 0$

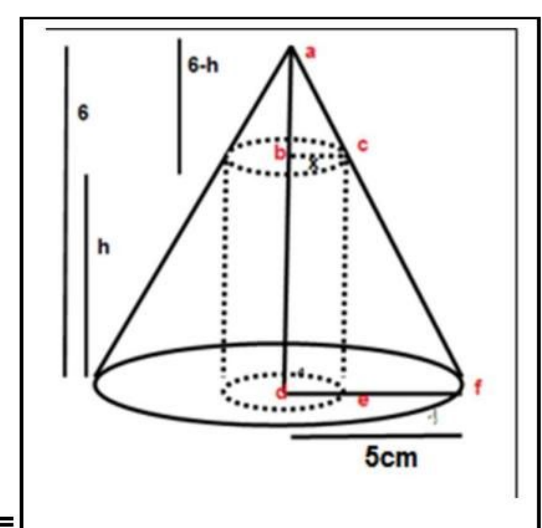
$3x(8 - 3x) = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل OR $x = \frac{8}{3}cm \Rightarrow h = \frac{1}{2}(12 - 8) = 2$ cm

2016 دور اول

جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6cm وطول قطر قاعدته يساوي 10cm .

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h



من تشابه المثلثين abc , adf

$$\frac{x}{5} = \frac{6-h}{6}$$

$6x = 5(6 - h) \Rightarrow 6x = 30 - 5h$

$5h = 30 - 6x \Rightarrow h = \frac{2}{5}(15 - 3x)$

$V = \pi x^2 h$ حجم الاسطوانية = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \pi x^2 [\frac{2}{5}(15 - 3x)] \Rightarrow V = \frac{2\pi}{5}(15x^2 - 3x^3)$

$V' = \frac{2\pi}{5}(30x - 9x^2) \Rightarrow 30x - 9x^2 = 0$

$3x(10 - 3x) = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل OR $x = \frac{10}{3}cm \Rightarrow h = \frac{2}{5}(15 - 10) =$

السؤال منهجي جدا وتم تغيير بسيط في ارتفاع المخروط وطول قطر قاعدته وقد ورد هذا السؤال مرتين في الامتحان الوزاري احدهما نصا من الكتاب والآخر تغيير بسيط في الارقام .

2003 دور 2

مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 4 cm وارتفاعه 12 cm يراد قطع مخروط دائري منه يرتكز رأسه في مركز قاعدة المخروط الاصلي وقاعدته توازي قاعدة المخروط الاصلي ، جد ابعاد المخروط المقطوع بحيث يكون حجمه اكبر مايمكن .

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h

من تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{x}{4} = \frac{12-h}{12}$$

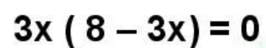
$12x = 4(12 - h) \Rightarrow 3x = 12 - h$

$h = 12 - 3x$

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$ حجم الاسطوانية = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3} x^2 (12 - 3x) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(12x^2 - 3x^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(24x - 9x^2) \Rightarrow 24x - 9x^2 = 0$



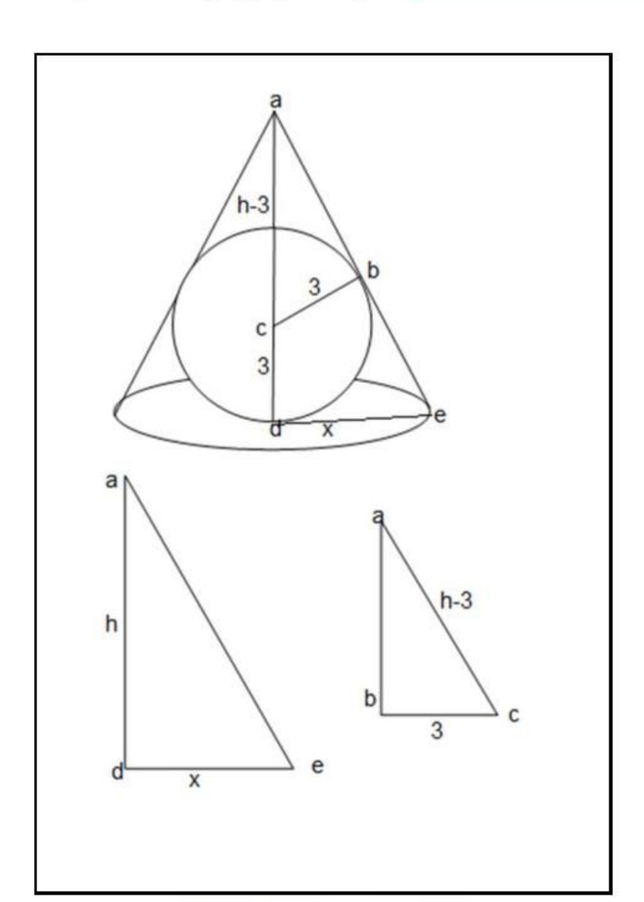
$3x(8 - 3x) = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل OR $x = \frac{8}{3}$ cm $\Rightarrow h = (12 - 8) = 4$ cm بعدي المخروط المطلوب

1998 دور 2

جد ابعاد مخروط دائري قائم حجمه اقل مايمكن ويحيط بكرة نصف قطرها 3 سم .

الحل \\ نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x ، وارتفاعه = h



في المثلث abc

$(h-3)^2 = 9 + (ab)^2 \Rightarrow h^2 - 6h + 9 = 9 + (ab)^2$

$(ab)^2 = h^2 - 6h \Rightarrow ab = \sqrt{h^2 - 6h}$

من تشابه المثلثين abc , ade

$\frac{h}{\sqrt{h^2-6h}} = \frac{x}{3} \Rightarrow x\sqrt{h^2-6h} = 3h$

$x = \frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$

$v = \frac{\pi}{3} x^2 h \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{9h^2}{h^2-6h}\right)$

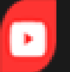
$v = 3\pi \left(\frac{h^2}{h-6}\right)$

$v' = 3\pi \left(\frac{(h-6).2h - h^2.1}{(h-6)^2}\right) = 0$

$2h^2 - 12h - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 - 12h = 0$

$h(h-12) = 0 \Rightarrow$ either $h = 0$ يهمل OR $h = 12$ ارتفاع المخروط

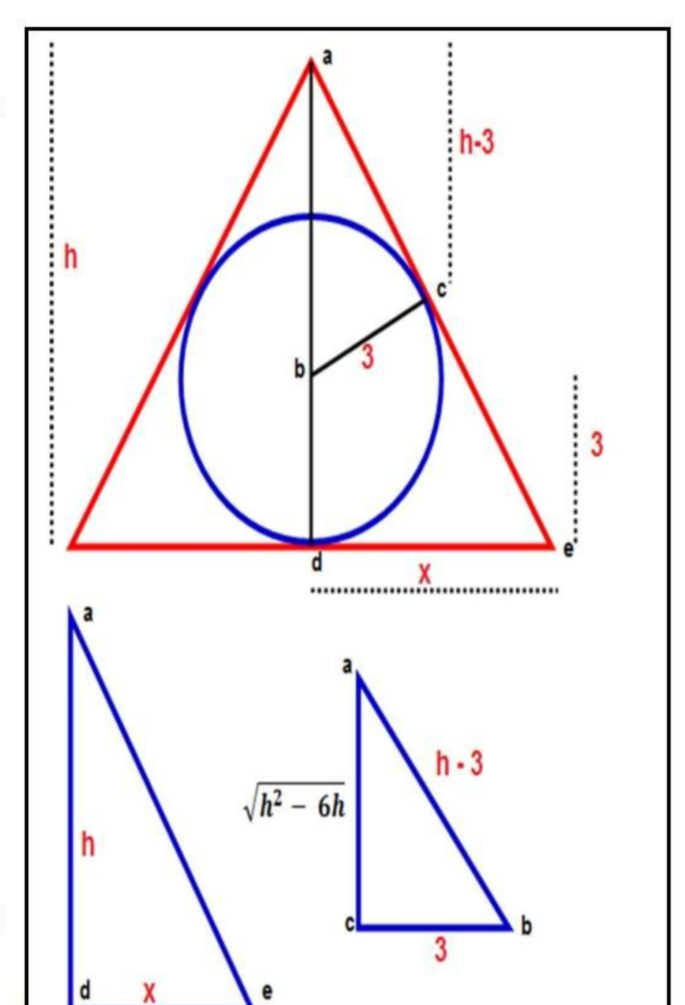
نصف قطر قاعدة المخروط $x = \frac{36}{\sqrt{72}} = \frac{36}{6\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ cm



2008 خارج القطر

جد مساحة اصغر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه خارج دائرة نصف قطرها 3 سم .

الحل \\ نفرض ان طول قاعدة المثلث = 2x ، وارتفاعه = h



في المثلث acb

$(h-3)^2 = 9 + (ac)^2 \Rightarrow h^2 - 6h + 9 = 9 + (ac)^2$

$(ac)^2 = h^2 - 6h \Rightarrow ac = \sqrt{h^2 - 6h}$

من تشابه المثلثين acb , ade

$\frac{h}{\sqrt{h^2-6h}} = \frac{x}{3} \Rightarrow x\sqrt{h^2 - 6h} = 3h$

$x = \frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$

$A = \frac{1}{2}2x \cdot h = x\,h \Rightarrow A = \left(\frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}} \cdot h\right)$

$A = \left(\frac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}\right)$

$A' = \frac{\sqrt{h^2-6h}\,.6h - 3h^2 . \frac{2h-6}{2\sqrt{h^2-6h}}}{\sqrt{h^2-6h}} = 0$

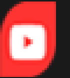
$[\sqrt{h^2-6h}\,.6h - 3h^2 . \frac{2h-6}{2\sqrt{h^2-6h}} = 0\,].2\sqrt{h^2-6h}$

$12h(h^2-6h) - 3h^2(2h-6) = 0$

$12h^3 - 72h^2 - 6h^3 + 18h^2 = 0$

$6h^3 - 54h^2 = 0 \Rightarrow 6h^2(h-9) = 0 \Rightarrow$ either $h = 0$ يهمل OR $h = 9$ cm

$x = \frac{27}{\sqrt{81-54}} = \frac{27}{\sqrt{27}} = 3\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow A = 3\sqrt{3}\ .\ 9 = 27\sqrt{3}$ cm^2 اصغر مساحة لهذا المثلث

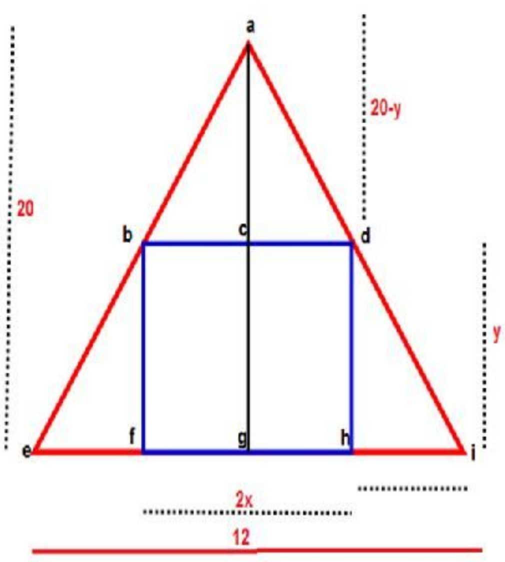


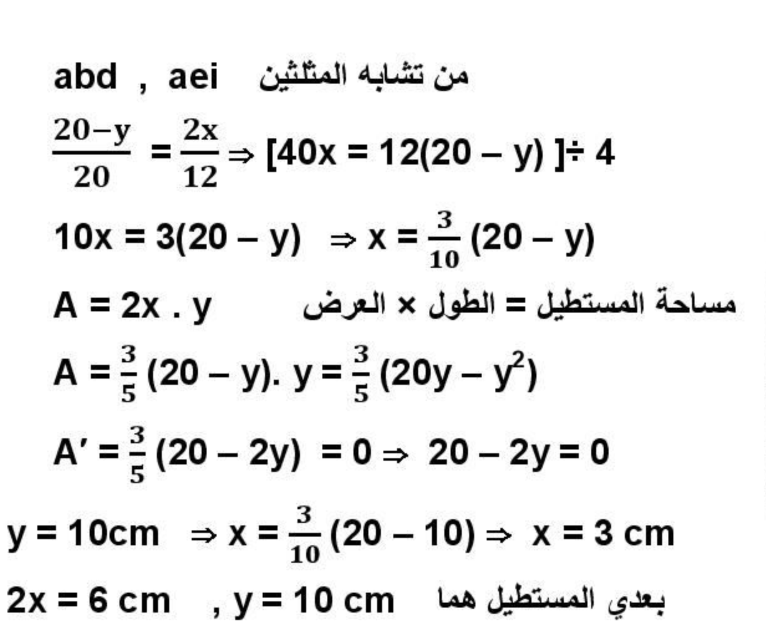


2000 دور 1 — abc مثلث فيه $ab = ac$ ، $ad \perp bc$ ، $bc = 12$ cm ، $ad = 20$ cm جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث .

2007 دور 1 \ جد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 20 سم وارتفاعه 12 سم.

الحل :- نفرض ان بعدي المستطيل $2x$, y





من تشابه المثلثين abd , aei

$$\frac{20-y}{20} = \frac{2x}{12} \Rightarrow [40x = 12(20-y)] \div 4$$

$$10x = 3(20-y) \Rightarrow x = \frac{3}{10}(20-y)$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = 2x \cdot y$

$$A = \frac{3}{5}(20-y) \cdot y = \frac{3}{5}(20y - y^2)$$

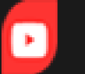
$$A' = \frac{3}{5}(20-2y) = 0 \Rightarrow 20 - 2y = 0$$

$$y = 10\text{cm} \Rightarrow x = \frac{3}{10}(20-10) \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

بعدي المستطيل هما $2x = 6$ cm , $y = 10$ cm

تلميح1 \\ لو علم في المثلث طول كل من الساقين والقاعدة او طول كل من الساقين والارتفاع فيجب احتساب الارتفاع في الحالة الاولى واحتساب القاعدة في الحالة الثانية عن طريق فيثاغورس قبل البدء برسم المستطيل مع التأكيد على ان العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها ، حيث انه لايمكن ايجاد ابعاد اكبر مستطيل يرسم داخل مثلث الا اذا علم في المثلث طول قاعدته وارتفاعه .

تلميح 2 \\ لو علم بعدي هذا المستطيل في السؤال وهما 10 , 6 وطلب ايجاد مساحة اصغر مثلث يحيط بهذا المستطيل بحيث ان رأسين من رؤوس المستطيل يقعان على قاعدة المثلث والرأسين الاخرين على ساقيه لفرضنا ان طول قاعدة المثلث $2x$ والارتفاع h عندها سينتج من التشابه $\frac{h-10}{h} = \frac{6}{2x}$ حاول تكمل الحل للحصول على مثلث طول قاعدته 12 سم وطول ارتفاعه 20 سم ... وقتا ممتعا اتمناه لكم .



2008 دور 2

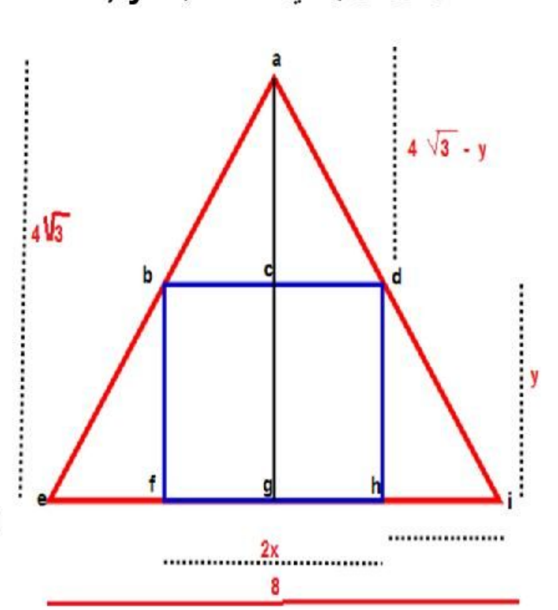
جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الاضلاع ارتفاعه ($4\sqrt{3}\ cm$)

الحل :- نفرض ان طول كل من اضلاع المثلث 2L فيكون في المثلث agi

$(2L)^2 = L^2 + 48 \Rightarrow 4L^2 = L^2 + 48 \Rightarrow 3L^2 = 48 \Rightarrow L^2 = 16 \Rightarrow L = 4 \Rightarrow 2L = 8$

نفرض ان بعدي المستطيل 2x , y

من تشابه المثلثين abd , aei



$\frac{4\sqrt{3}-y}{4\sqrt{3}} = \frac{2x}{8} \Rightarrow [\ 8\sqrt{3}\,x = 8(4\sqrt{3} - y)\ ] \div 8$

$\sqrt{3}\,x = (4\sqrt{3} - y) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - y)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = 2x \,.\, y$

$A = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - y).\, y = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}\,y - y^2)$

$A' = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - 2y) = 0 \Rightarrow 4\sqrt{3} - 2y = 0$

$y = 2\sqrt{3}\ cm \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) \Rightarrow x = 2$ cm

بعدي المستطيل هما $2x = 4\ cm \;,\; y = 2\sqrt{3}\ cm$

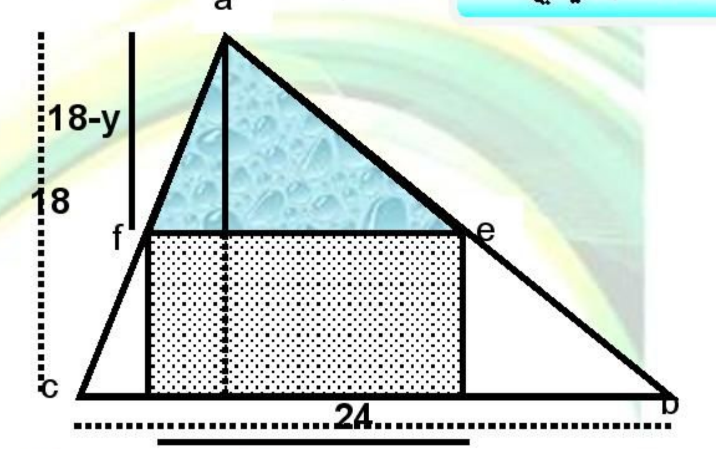
2013 دور 2

2015 تمهيدي

جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته 24 cm وارتفاعه 18 cm بحيث رأسين متجاورين من رؤوسه يقعان على القاعدة والرأسان الآخران يقعان على ساقيه

نفرض طول المستطيل = x ، نفرض عرض المستطيل = y

من تشابه المثلثين abc , aef



$\frac{18-y}{18} = \frac{x}{24} \Rightarrow [\ 18x = 24(18 - y)\ ] \div 6$

$3x = 4(18 - y) \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18 - y)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = x \,.\, y$

$A = \frac{4}{3}(18 - y)\,.\,y = \frac{4}{3}(18y - y^2)$

$A' = \frac{4}{3}(18 - 2y) = 0 \Rightarrow 18 - 2y = 0$

$y = 9cm \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18 - 9) \Rightarrow x = 12cm$

$A'' = \frac{4}{3}(-2) < 0$ أي ان للمنحني نهاية عظمى وبالتالي تكون لهذا الابعاد اكبر مساحة ممكنة لسطح المستطيل

2011 خارج القطر

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث

الحل :- نفرض نقطة التقاطع مع محور السينات (x , 0) ،

نفرض نقطة التقاطع مع محور الصادات (0 , y)

من تشابه المثلثين abc , aef

$\frac{6}{x} = \frac{y-8}{y} \Rightarrow 6y = x(y-8) \Rightarrow x = \frac{6y}{y-8}$

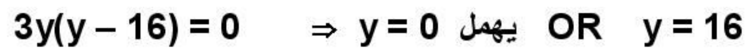
مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع $A = \frac{1}{2} x\, y$

$A = \frac{1}{2} y \left(\frac{6y}{y-8}\right) \Rightarrow A = \frac{3y^2}{y-8}$

$A' = \frac{(y-8).6y - 3y^2.1}{(y-8)^2} = \frac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y-8)^2}$

$\frac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y-8)^2} = 0 \Rightarrow 3y^2 - 48y = 0$

$3y(y-16) = 0 \Rightarrow y = 0$ يهمل OR $y = 16$



$x = \frac{(6)(16)}{16-8} \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (12 , 0) , (0 , 16)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16-0}{0-12} = -\frac{4}{3}$

معادلة المستقيم $(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 16) = -\frac{4}{3}(x - 0)$

$3y - 48 = -4x \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$ معادلة المستقيم



حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الرابع (التكامل وتطبيقاته)

1996 دور 1

جد التكاملات التالية

$\int (\sin x - 3\sec^2 x)\,dx = -\cos x - 3\tan x + c$

$\int \cos 6x \cos 3x\,dx = \int (1 - 2\sin^2 3x)\cos 3x\,dx$

$= \int \cos 3x\,dx - 2\int \sin^2 3x \cos 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \cos 3x\ 3dx - 2 . \frac{1}{3}\int \sin^2 3x . 3\cos 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + c$

$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx = 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$

$= 2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^3 = 2\,(2-1) = 2$

1996 دور 2

جد التكامل

$\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)\,dx = \int (\sec^2 x - \sin^2 x)\,dx$

$= \int [\sec^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)]dx = \int [\sec^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)]dx$

$= \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

1997 دور 1

جد $\int_4^8 x\sqrt{x^2 - 15}\,dx$

sol: $\int_4^8 x\sqrt{x^2 - 15}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^8 2x\,(x^2 - 15)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2} . \frac{2}{3}[(x^2 - 15)^{\frac{3}{2}}]_4^8$

$= \frac{1}{3}[\sqrt{(x^2-15)^3}]_4^8 = \frac{1}{3}[\sqrt{(64-15)^3} - \sqrt{(16-15)^3}]$

$= \frac{1}{3}(343 - 1) = \frac{342}{3} = 114$

1998 دور 1

اذا كان $\int_{-1}^{a}(x - x^3)dx = \frac{-9}{4}$ جد قيمة $a \in R$

sol: $\int_{-1}^{a}(x - x^3)dx = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4}$

$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4}$

$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) = -2 \Rightarrow 2a^2 - a^4 = -8 \Rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$

$(a^2 - 4)(a^2 + 2) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \quad , \quad a^2 + 2 \neq 0$

1998 دور 2

اذا كان $\int_{a}^{b}(2x+3)\,dx = 12$ ، وكان $a + 2b = 3$ جد قيمتي $a , b \in R$

sol: $\int_{a}^{b}(2x+3)\,dx = 12 \Rightarrow [x^2 + 3x]_a^b = 12$

$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 12 \Rightarrow b^2 + 3b - a^2 - 3a = 12$ .....(1)

$a = 3 - 2b$ .....(2) in 1

$b^2 + 3b - (3 - 2b)^2 - 3(3 - 2b) = 12$

$b^2 + 3b - (9 - 12b + 4b^2) - 9 + 6b - 12 = 0$

$b^2 + 3b - 9 + 12b - 4b^2 - 9 + 6b - 12 = 0$

$-3b^2 + 21b - 30 = 0 \;]\div(-3) \Rightarrow b^2 - 7b + 10 = 0$

$(b - 2)(b - 5) = 0 \Rightarrow$ either $b = 2 \Rightarrow a = -1$ OR $b = 5 \Rightarrow a = -7$

2000 دور 2
2002 دور 1
2005 دور 2

جد $\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx$

sol : $\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_{0}^{4}(x^2+9)^{\frac{1}{2}}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4}(x^2+9)^{\frac{1}{2}}2x\,dx$

$= [(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(x^2+9)^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{1}{3}[\sqrt{(x^2+9)^3}]_0^4$

$= \frac{1}{3}[(\sqrt{(16+9)^3}) - (\sqrt{(0+9)^3})] = \frac{1}{3}[\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}] = \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}$

2004 دور 1

اذا كان $\int_{a}^{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة $a \in R$

$\int_{a}^{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2 \Rightarrow \int_{a}^{4}(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}x\,dx = 2 \Rightarrow = \frac{1}{2}\int_{a}^{4}(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}2x\,dx = 2$

$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2 \Rightarrow = [\sqrt{x^2+9}]_a^4 = 2$

$= (\sqrt{16+9}) - (\sqrt{a^2+9}) = 2 \Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$

$\sqrt{a^2+9} = 3 \Rightarrow a^2 + 9 = 9 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

2001 دور 1

ـد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)dx$

sol: $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)dx = \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}\,(2x+5)dx$

$\frac{2}{3}\left[(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+5x)^3}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(36)^3} - \sqrt{(0)^3}\right) = \frac{2}{3}\,(216) = 144$

2001 دور 2

جد $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

sol: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^{1}(3-2x)^{-2}\,dx$

$= \frac{-1}{2}\int_{-1}^{1}(3-2x)^{-2}(-2)dx = \frac{1}{2}\,[(3-2x)^{-1}]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

2003 دور 2

جد $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

sol: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{0}^{1}(3-2x)^{-2}\,dx$

$= \frac{-1}{2}\int_{0}^{1}(3-2x)^{-2}(-2)dx = \frac{1}{2}\,[(3-2x)^{-1}]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2002 دور 2

ـد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x}\,(x+6)dx$

sol: $\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,(x+6)dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}} + 6\,x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6\cdot\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 4\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + 4\sqrt{4^3}\right) - (0) = \frac{64}{5} + 32 = \frac{224}{5}$

2003 دور 1

جد $\int x\,(x^2+3)^3\,dx$

sol: $\int x\,(x^2+3)^3\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^3\,2x\,dx = \frac{1}{8}(x^2+3)^4 + c$

2004 دور 2
2015 خارج

جد $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}\,dx$

sol : $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}\,dx = \int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\,x\,dx$

$= \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1}(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4)\,x\,dx = \frac{-1}{4}\,\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{16}\,(1-1) = 0$

2006 دور 1

ت $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}\,dx$

sol: $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2} = \int_1^2 (5-2x)^{-2}\,dx$

$= \frac{-1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}(-2)\,dx = \frac{1}{2}\left[(5-2x)^{-1}\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2009 دور 1

ت $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

sol: $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^1 (x^2+1)^{-2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\,2x\,dx$

$= \frac{-1}{2}\left[(x^2+1)^{-1}\right]_0^1$

$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$

2006 دور 2

ت $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

sol: $\int_1^2 \frac{1}{(3x-4)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2} = \int_1^2 (3x-4)^{-2}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}(3)\,dx = \frac{-1}{3}\left[(3x-4)^{-1}\right]_1^2$

$= \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2 = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{-1}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}$

2007 دور 1

ت $\int x\,(x^2+1)^{\frac{3}{4}}\,dx$

sol : $\int x\,(x^2+1)^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{3}{4}}\,2x\,dx$

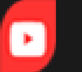
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\,(x^2+1)^{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[4]{(x^2+1)^7} + c$

2008 تمهيدي

ت $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

sol: $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int_0^7 (x+1)^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7$

$= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7 = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}$



2008 دور 1

اذا كانت $\int_a^b f(x)dx = 5$ ، $\int_c^b f(x)dx = 3$ وكانت $c \in [a,b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)dx$

sol : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow 5 = \int_a^c f(x)dx + 3 \Rightarrow \int_a^c f(x)dx = 2$

2009 دور 2

جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$

sol : $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{|x|\sqrt{(x+1)}}\,dx$

$= \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}\,dx = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{(x+1)}}\,dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$= 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = 2\left[\sqrt{x+1}\right]_3^8 = 2(3-2) = 2$

لاحظ عزيزي الطالب ان القيمة المطلقة للمتغير x تم تعويضها بالصورة الموجبة لان جميع العناصر داخل فترة حدود التكامل موجبة ..... الان اريك ان تجرب فيما لو كانت حدود التكامل [-3,0] ماذا سيكون الحل ؟ ولو كانت حدود التكامل [-3 ,8] فماذا سيكون الحل برأيك ؟ فكر ولاتتسرع .

2014 خارج القطر

جد $\int_1^2 x\, e^{-\ln x} dx$

$\int_1^2 xe^{-\ln x}dx = \int_1^2 x\,(e^{\ln x})^{-1}\,dx = \int_1^2 x\,.\,x^{-1}\,dx = \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

2015 نازحين د1

جد $\int_2^5 x\, e^{-\ln x} dx$

$\int_2^5 xe^{-\ln x}dx = \int_2^5 x\,(e^{\ln x})^{-1}\,dx = \int_2^5 x\,.\,x^{-1}\,dx = \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 5 - 2 = 3$

2010 دور 2

اذا كان $\int_1^3 g(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 6$ جد $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]dx$

sol: $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx + \int_1^3 4x\,dx$

$= 6 - 2 + [2x^2]_1^3 = 4 + (18 - 2) = 20$

2010 تمهيدي

جد $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx$

sol: $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx = \int 2(2x+3)\,(2x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \int (2x+3)^{\frac{3}{2}}\,2dx = \left(\frac{2}{5}\right)(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5} + c$

2014 دور 4 انبار

جـ $\int \frac{x}{(3x^2+5)}\ dx$

sol : $\int \frac{x}{(3x^2+5)}\ dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{(3x^2+5)}\ dx = \frac{1}{6}\ ln(3x^2+5) + c$

لاحظ اننا لم نضع القيمة المطلقة بعد اجراء التكامل لان الناتج مجموع مربعين ويكون موجبا دائما

2012 تمهيدي
2015 تمهيدي

جـ $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\ dx$

sol : $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx = [\ln|x^2+9|\,]_0^4 = (\ln 25) - (\ln 9) = \ln\frac{25}{9}$

2011 دور 1
2013 دور 2
2016 تمهيدي

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx = [\tfrac{1}{3}(1+e^x)^3\,]_0^1$$

Let $u = 1 + e^x$

$du = e^x\,dx$

$$= \tfrac{1}{3}[(1+e^1)^3 - (1+e^0)^3]$$
$$= \tfrac{1}{3}[(1+e^1)^3 - (1+1)^3]$$
$$= \tfrac{1}{3}[(1+e^1)^3 - 8]$$

2011 دور 1

جـ $\int_{-3}^4 |x|dx$

الحل :-

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^{(+)}} f(x) = 0\ L_1\ ,\ \lim_{x\to 0^{(-)}} f(x) = 0\ L_2$

$\because L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow$ الغاية موجودة $\because f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ الدالة مستمرة

يمكن ذكر ان الدالة مستمرة على الفترة [-3,4] فقط دون ذكر تفصيل الاستمرارية والافضل اثبات الاستمرارية

$$\int_{-3}^4 f(x)dx = \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = \int_{-3}^0 (-x)dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$= [-\tfrac{1}{2}x^2\,]_{-3}^0 + [\tfrac{1}{2}x^2\,]_0^4 = [(0) - (\tfrac{-9}{2})] + [(8) - (0)]$$

$$= \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2} = 12.5$$

2011 دور 2
2013 دور 1

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx = [\ln|x^3+4x+1|]_0^1 = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$$

2012 دور 1
2014 دور 2
2016 دور 2

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}dx = [\tfrac{1}{2}e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5} = \tfrac{1}{2}(e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3})$$

$$= \tfrac{1}{2}[(e^{\ln 5})^2 - (e^{\ln 3})^2] = \tfrac{1}{2}[(5)^2 - (3)^2]$$

$$= \tfrac{1}{2}[25 - 9] = (\tfrac{1}{2})(16) = 8$$

2012 دور 2
2012 خارج
2015 دور 2

$$u = \sqrt{x}\ ,\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^4$$

$$= (e^{\sqrt{4}}) - (e^{\sqrt{1}}) = e^2 - e$$

2013 دور 3

$$\int x\,.\,e^{x^2}dx = \tfrac{1}{2}\int 2x\,.\,e^{x^2}dx = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + c$$

2014 تمهيدي

جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$.

2015 دور 1

RHS : $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = 2\,[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\,[(\tan\frac{\pi}{4}) - (\tan 0)] = 2(1 - 0) = 2$

LHS : $\int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = [\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x]_1^a = (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1$

$\because \int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx \Rightarrow [\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1 = 2]\,.\,2$

$a^2 + a - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0$

$a = -3$ OR $a = 2$

2014 دور 1

اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 & ,\forall\ x\ge 0\\ 2x & ,\forall\ x<0\end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$

الحل :-

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^{(+)}} f(x) = 0 \ L_1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^{(-)}} f(x) = 0 \quad L_2$

$\because L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ الدالة مستمرة عند الـ (0)

وكذلك الدالة مستمرة لكل $x<0$, $x>0$ لانهما كثيرتا حدود

$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(2x)dx + \int_{0}^{3}(3x^2)dx$

$= [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_0^3 = [(0) - (1)] + [(27) - (0)] = -1 + 27 = 26$

2014 دور 3

$\int \sqrt{e^{2x-4}}\ dx$

sol : $\int \sqrt{e^{2x-4}}\ dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\ dx = \int e^{x-2}\ dx = e^{x-2} + c$

2014 دور 3

$\int_{-2}^{4}|3x-6|dx = 30$

sol : $|3x-6| = \begin{cases}3x-6 & ,\ x\ge 2\\ -x+6 & ,\ x<2\end{cases}$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to 2^{(+)}} f(x) = 0 \ L_1 \quad , \quad \lim_{x\to 2^{(-)}} f(x) = 0 \ L_2 \because L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 0 \Rightarrow$ الدالة مستمرة

$\Rightarrow \int_{-2}^{4}|3x-6|dx = \int_{-2}^{2}(-3x+6)dx + \int_{2}^{4}(3x-6)dx$

$= [-\frac{3}{2}x^2 + 6x]_{-2}^{2} + [\frac{3}{2}x^2 - 6x]_2^4$

$= [(-6+12) - (-6-12)] + [(24-24) - (6-12)]$

$= (6+18) + (6) = 30$

2015 دور2 خارج

اثبت ان : $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2$

sol : $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-2}{3}}dx = 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}dx$

$$= \left[3\cdot\frac{2}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\right]_1^8$$

$$= (2\sqrt{(\sqrt[3]{8}-1)^3}) - (2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3})$$

$$= (2\sqrt{(1)^3}) - (2\sqrt{(0)^3}) = 2$$

2015 دور2

جد التكامل التالي $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx = \int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\,dx = 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$$

2016 دور 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}}\,\frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2}}(2)(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{2}\,\sqrt{3+\sqrt{x}} + c$$



جد كلا من

2016 دور1 خ

$$1)\ \int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\,dx = \int \frac{(x-3)}{2^3(x-3)^3}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}(-1)\ (x-3)^{-1} + c = \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

$$2)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

2016 تمهيدي

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

1997 دور 1

جد $\int \cos 2x\ \sin^2 x\,dx$

$$\int \cos 2x \,.\, \sin^2 x\,dx = \int \cos 2x \,.\, \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x\right)dx = \int \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos 4x)\right]dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x\right]dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

1997 دور 2

2013 دور 2

جد $\int (1+\cos 3x)^2\,dx$

$$\int (1+\cos 3x)^2\,dx = \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\,dx$$

$$= \int \left[1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]dx = \int \left(1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x\right)dx = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

1998 دور 1

جد $\int (\cos x - \sin 2x)^2\, dx$

sol : $\int (\cos x - \sin 2x)^2\, dx = \int (\cos^2 x - 2\sin 2x \cos x + \sin^2 2x)\, dx$

$= \int [\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - 2 \cdot 2\sin x \cos x \cos x + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)]\, dx$

$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$

$= \int (1 + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$

$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$

1999 دور 2

جد $\int (\sin^2 x + \cos^4 x)\, dx$

sol: $\int (\sin^2 x + \cos^4 x)\, dx = \int [\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + (\cos^2 x)^2]\, dx$

$= \int [\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + (\frac{1}{2}(1 + \cos 2x))^2]\, dx$

$= \int [\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)]\, dx$

$= \int [(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)]\, dx$

$= \int [\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 2x]\, dx = \int [\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\, dx$

$= \int [\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)]\, dx = \int [\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x]\, dx = \frac{7}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

2000 دور 1

جد $\int \sin^4 x\, dx$

$\int \sin^4 x\, dx = \int [\sin^2 x]^2\, dx = \int [\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)]^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\int [1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\, dx = \frac{1}{4}\int [1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x]\, dx$

$= \frac{1}{4}\int [\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x]\, dx = \frac{1}{4}[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x] + c$

2001 دور 1

جد $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2\, dx = \int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + c$

2006 تمهيدي

جد $\int (\sin^2x + 1)\ dx$

$$\int (\sin^2x + 1)\ dx = \int[\frac{1}{2}(1 - \cos2x) + 1]\ dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin2x) + x + c$$

لاحظ ان العدد $\frac{1}{2}$ لم نقم باخراجه خارج التكامل عن التحويل بسبب وجود ملحق مع $\sin^2x$ وهو العدد (1)

2009 تمهيدي

جد $\int \tan3x \sec^5 3x\ dx$

$$\int \tan3x \sec^5 3x\ dx = \int \sec^4 3x\ \sec3x\ \tan3x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^4 3x\ \ 3\sec3x\ \tan3x\ dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{5}\sec^5 3x + c = \frac{1}{15}\sec^5 3x + c$$

2008 خارج القطر

جد $\int \tan2x \sec^3 2x\ dx$

$$\int \tan2x \sec^3 2x\ dx = \int \sec^2 2x\ \sec2x\ \tan2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\ \ 2\sec2x\ \tan2x\ dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\sec^3 2x + c = \frac{1}{6}\sec^3 2x + c$$

2012 دور 2

$\int \cot x \csc^3 x\ dx$

$$\int \cot x \csc^3 x\ dx = \int \csc^2 x\ (\csc x \cot x)dx = -\int \csc^2 x\ (-\csc x \cot x)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

2008 خارج القطر

جد $\int \cos^3 x\ dx$

$$\int \cos^3 x\ dx = \int \cos x . \cos^2 x\ dx = \int \cos x\ (1 - \sin^2 x)\ dx$$

$$= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x)\ dx = \sin x - (\frac{1}{3})\sin^3 x + c$$

2008 دور 2

جد $\int \cos^2 2x \sin x\ dx$

sol : $\int \cos^2 2x \sin x\ dx = \int (\cos2x)^2 \sin x\ dx$

$$= \int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x\ dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)\sin x\ dx$$

$$= 4\int \cos^4 x \sin x\ dx - 4\int \cos^2 x \sin x\ dx + \int \sin x\ dx$$

$$= -4\int \cos^4 x(-)\sin x\ dx + 4\int \cos^2 x(-)\sin x\ dx + \int \sin x\ dx$$

$$= \frac{-4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

عزيزي الطالب ماذا لو كان السؤال السابق بالصور $\int \cos^2 2x \sin4x\ dx$ ، $\int \cos^2 2x \cos x\ dx$

2010 دور 1

جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx + cosx)^2\, dx$

sol: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx + cosx)^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2x + 2\, sinx\, cosx + cos^2x)\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + sin2x)\, dx = \left[x - \frac{1}{2}\, cos2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\, cos\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\, cos0\right)$

$= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$

2010 تمهيدي
2014 خارج القطر

جد $\int \frac{cos^3x}{1-sinx}\, dx$

$\int \frac{cos^3x}{1-sinx}\, dx = \int \frac{cosx . cos^2x}{1-sinx}\, dx$

$= \int \frac{cosx . (1 - sin^2x)}{1-sinx}\, dx = \int \frac{cosx . (1-sinx)(1+sinx)}{1-sinx}\, dx$

$= \int (1 + sinx)\, cosx\, dx = \frac{1}{2}(1 + sinx)^2 + c$

ملاحظة \\ يمكن حل السؤال السابق بطريقة (ضرب البسط والمقام بمرافق المقام sinx + 1 فيصبح المقام عندها $1 - sin^2x = cos^2x$ ليتم اختصاره مع البسط للوصول الى نفس النتيجة ، اما الخطوة قبل الاخيرة فيمكن اجراء التكامل بطرق اخرى (حاول ذلك)

2011 خارج القطر

جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}\, sinx\, dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}\, sinxdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}\,(-sinx)dx = [-e^{cosx}]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= (-e^{cos\frac{\pi}{2}}) - (-e^{cos0}) = -e^0 + e^1 = -1 + e$

2013 خارج القطر
2014 دور 4 انبار

جد $\int \sqrt{1 - sin2x}\, dx$

$\int \sqrt{1 - sin2x}\, dx = \int \sqrt{(sin^2x - 2sinx\, cosx + cos^2x)}\, dx$

$= \int \sqrt{(sinx - cosx)^2}\, dx = \pm \int (sinx - cosx)\, dx = \pm(-cosx - sinx) + c$

عزيزي الطالب : ماذا لو كان السؤال السابق $\int \sqrt{1 - sin4x}\, dx$ او $\int \sqrt{9 - 9\, sin6x}\, dx$ ؟؟؟؟

2011 دور 1

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)} dx = [\ln(2+\tan x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= [\ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2+\tan(-\frac{\pi}{4}))]$$

$$= [\ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2-\tan\frac{\pi}{4})] = \ln(2+1) - \ln(2-1)$$

$$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

2012 تمهيدي

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -[(\ln|\cos\frac{\pi}{3}|) - (\ln|\cos 0|)]$$

$$= -[(\ln|\frac{1}{2}|) - (\ln|1|)] = -(\ln\frac{1}{2} - 0) = -\ln\frac{1}{2}$$

2013 دور 1

$$\int \csc^2 x . \cos x \ dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x}.\cos x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int (\frac{\cos x}{\sin x} . \frac{1}{\sin x}) dx = \int \cot x . \csc x \ dx = -\csc x + c$$

2013 دور 3

2014 دور 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

sol: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan o\right) = \frac{1}{2}$

2014 دور 1

2015 دور 1

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int (\cos 2x + \sin 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

2014 دور 3

$\int \sin6x \cos^2 3x \, dx$

sol : $\int \sin6x \cos^2 3x \, dx = \int 2 \sin3x \cos3x \cos^2 3x \, dx$

$= 2 \int \cos^3 3x \sin3x \, dx = 2(\frac{-1}{3}) \int \cos^3 3x \, (-3)\sin3x \, dx$

$= \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cos^4 3x + c = \frac{-1}{6} \cdot \cos^4 3x + c$

2015 تمهيدي

جد $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \cos x dx = [2(\sin x)^{\frac{1}{2}}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = [2\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}) - (2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}) = (2\sqrt{1}) - (2\sqrt{\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

2015 نازحين د1

جد $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \, dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \, dx = \int (\sin x)^{\frac{-1}{3}} \cos x \, dx = \frac{3}{2} (\sin x)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\sin^2 x} + c$$

2015 خارج د1

جد $\int sec^2 8x \, e^{\tan 8x} \, dx$

$$\int sec^2 8x \, e^{\tan 8x} \, dx = \frac{1}{8} \int 8 sec^2 8x \, e^{\tan 8x} \, dx = \frac{1}{8} e^{\tan 8x} + c$$

2015 د4 رسالة

جد التكاملات التالية :

1) $\int_3^2 \frac{x^3 - 1}{x-1} dx = -\int_2^3 \frac{x^3 - 1}{x-1} dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx = -\int_2^3 (x^2 + x + 1) \, dx$

$$= -[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x]_2^3 = -[(9 + \frac{9}{2} + 3) - (\frac{8}{3} + 2 + 2)]$$

$$= -[12 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} - 4] = -8 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} = \frac{-48-27+16}{6} = \frac{-59}{6}$$

2) $\int (\sin2x + \cos2x)^2 \, dx = \int (\sin^2 2x + 2\sin2x \cdot \cos2x + \cos^2 2x) \, dx$

$$= \int (1 + \sin4x) \, dx = x - \frac{1}{4} \cos4x + c$$

جد التكاملات التالية

2016 دور اول

a) $\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx = \int 2\sin 3x \cos 3x \cos^2 3x\, dx$

$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x\, dx$

$= (2)(\frac{-1}{3})\int \cos^3 3x\,(-3\sin 3x)\, dx$

$= (\frac{-2}{3})(\frac{1}{4})\cos^4 3x + c = (\frac{-1}{6})\cos^4 3x + c$

u= cos3x

du = -3sin3x dx

تأكيد \\ يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة فالطريقة اعلاه تم توحيد الزوايا بدلالة 3x وهناك طريقة اخرى باستخدام القانون $\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)$ كما سيرد ذكرها ادناه

$\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx = \int \sin 6x[\frac{1}{2}(1 + \cos 6x)]dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 6x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 6x \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{12}\int \sin 6x \,.\, 6dx + \frac{1}{12}\int \sin 6x\,(6\cos 6x)\, dx$

$= -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{24}\sin^2 6x + c$

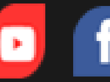
تأكيد \\ يمكن حل $\frac{1}{2}\int \sin 6x \cos 6x\, dx$ بطريقتين اضافيتين الاولى نجعل القوس الاصلي هو cos6x ويكون الجواب $\frac{-1}{24}\cos^2 6x$ والاخرى تحويل $\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2}\sin 12x$ ثم اجراء التكامل

b) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}\, dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x\, dx$

$= \frac{-1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2)\csc^2 2x\, dx = \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} 2x + c$

$= \frac{-1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + c$





2015 دور 4 رسالة

اذا كان للمنحني $f(x) = (x - 3)^3 + 1$ يمتلك نقطة انقلاب (a , b) جد القيمة العددية للمقدار

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$$

الحل :- نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية بالصفر

$$f'(x) = 3(x - 3)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x - 3) \Rightarrow 6(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$f(3) = (3 - 3)^3 + 1 = 1 \Rightarrow (3 , 1)$ نقطة انقلاب

$$(3 , 1) = (a , b) \Rightarrow a = 3 \ , b = 1$$

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx = \int_0^1 3(x-3)^2dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$= [(x-3)^3]_0^1 - [3(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1 - 3)^3 - (0 - 3)^3] - [3(3 - 3)^2 - 3(0 - 3)^2]$$

$$= [-8 + 27] - [0 - 27] = 19 + 27 = 46$$

2016 دور 1

$f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2 , 6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 6$

وكان $\int_{-2}^6 [f(x) + 3]dx = 32$ جد $\int_{-2}^1 f(x)dx$.

sol : $\int_{-2}^6 [f(x) + 3]dx = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)]dx + \int_{-2}^6 [3]dx = 32$

$$\Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)]dx + [3x]_{-2}^6 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)]dx + (18) - (-6) = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)]dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)]dx = 8 \ , \ \because \int_1^6 f(x)dx = 6$$

$$\int_{-2}^6 f(x)dx = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^6 f(x)dx \Rightarrow 8 = \int_{-2}^1 f(x)dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^1 f(x)dx = 2$$

2016 تمهيدي

لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى (-5) جد $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

الحل :- بما ان الدالة تمتلك نهاية صغرى فان $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

$\because f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

$\therefore (-1 , -5)$ نقطة النهاية الصغرى المحلية $\in f(x)$

$-5 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = -4 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 4$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2}(x^2 + 2x - 4)dx = [\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x]_{-1}^{2}$$

$$= (\tfrac{1}{3}(2)^3 + (2)^2 - 4(2)) - (\tfrac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1))$$

$$= (\tfrac{8}{3} + 4 - 8) - (-\tfrac{1}{3} + 1 + 4) = \tfrac{8}{3} - 4 + \tfrac{1}{3} - 5 = 3 - 9 = -6$$

يمكن ملاحظة العلاقة بين سؤال الكتاب ادناه مع السؤال اعلاه

لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى (-5) جد $\int_{1}^{3} f(x)dx$.

2016 دور 2 خارج

اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & , \forall x \geq 3 \\ 6 & , \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_{1}^{4} f(x)dx$

الحل :-

$f(3) = (2)(3) = 6$

$\lim_{x \to 3^{(+)}} f(x) = (2)(3) = 6 \quad L_1 \quad , \quad \lim_{x \to 3^{(-)}} f(x) = 6 \quad L_2$

$\because L_1 = L_2 = 6 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 6 \Rightarrow$ الدالة مستمرة عند الـ (3)

وكذلك الدالة مستمرة لكل $x < 3$, $x > 3$ لانهما كثيرتا حدود

$$\int_{1}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{3} 6dx + \int_{3}^{4} 2xdx$$

$$= [6x]_{1}^{3} + [x^2]_{3}^{4} = [(18) - (6)] + [(16) - (9)]$$

$$= 12 + 7 = 19$$

1997 دور 2
2008 دور 1
2008 خارج
2015 دور2خارج
2015 دور3
2016 دور 2 خارج

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4 - 12$

sol : $h(x) = x^4 - 12 - x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$ يهمل

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$A = |\int_{-2}^{2} f(x)dx| \Rightarrow A = |\int_{-2}^{2}(x^4 - x^2 - 12)dx|$

$= |\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 12x\right]_{-2}^{2}|$

$= |(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24) - (\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 24)| = |\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24|$

$= |\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48| = |\frac{192-80-720}{15}| = |\frac{-608}{15}| = \frac{608}{15}$ وحدة مساحة

1998 دور 1

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2$ ومحور السينات بالفترة [1,3]

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$ OR $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \in [1,3]$, $x = -2 \notin [1,3]$

$A = |\int_{1}^{2} f(x)dx| + |\int_{2}^{3} f(x)dx|$

$A = |\int_{1}^{2}(x^4 - 4x^2)dx| + |\int_{2}^{3}(x^4 - 4x^2)dx|$

$A = |A_1| + |A_2|$

$A_1 = \int_{1}^{2}(x^4 - 4x^2)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_{1}^{2}$

$= (\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) - (\frac{1}{5} - \frac{4}{3}) = (\frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3}) = \frac{31}{5} - \frac{28}{3} = \frac{93-140}{15} = \frac{-47}{15}$

$A_2 = \int_{2}^{3}(x^4 - 4x^2)dx = = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_{2}^{3}$

$= (\frac{243}{5} - \frac{108}{3}) - (\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) = (\frac{243}{5} - \frac{108}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3}) = \frac{211}{5} - \frac{76}{3} = \frac{633-380}{15} = \frac{253}{15}$

$A = |A_1| + |A_2| = |\frac{-47}{15}| + |\frac{253}{15}| = \frac{47}{15} + \frac{253}{15} = \frac{300}{15} = 20$ وحدة مساحة

1999 دور 1
2005 تمهيدي

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = x \ , \ g(x) = \sqrt[3]{x}$ بالفترة [-1 , 1]

sol : $h(x) = x - \sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x} - x = 0 \Rightarrow [\ \sqrt[3]{x} = x\ ]$ بتربيع الطرفين

$x = x^3 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad OR \quad x = \pm 1 \in [-1,1]$ لاتجزأ

$$A = \left| \int_{-1}^{0} h(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{1} h(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{0} \left(x^{\frac{1}{3}} - x \right) dx \right| + \left| \int_{0}^{1} \left(x^{\frac{1}{3}} - x \right) dx \right|$$

$$= \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_{0}^{1}$$

$$= \left| (0 - 0) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \right|$$

$= \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة



2011 دور 1

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$

sol : $h(x) = \sqrt{x} - x \Rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \Rightarrow [\sqrt{x} = x]$ بتربيع الطرفين

$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ OR $x = 1$

$$A = \left| \int_0^1 h(x)dx \right| = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx \right| = \left| \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx \right|$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$= \left| \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) \right| = \left| \frac{4-3}{6} \right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

1999 دور 2

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = x$ بالفترة $[-2, 2]$

sol : $h(x) = x - (2 - x^2) = x^2 + x - 2$, $x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow$ either $x = -2 \in [-2, 2]$ لاتجزأ , or $x = 1 \in [-2, 2]$

$$A = \left| \int_{-2}^1 h(x)dx \right| + \left| \int_1^2 h(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2)dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 + x - 2)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^1 \right| + \left| \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4\right) \right| + \left| \left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6\right) \right| + \left| \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \right| = \dots = \frac{19}{3} \text{ unit}^2$$

2001 دور 1
2015 دور 2

د المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - 9x$ ومحور السينات بالفترة [3 , 3-]

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$x = 0 \in [-3 , 3]$ يجزأ OR $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \in [-3 , 3]$ لا يجزأ

$$A = \left| \int_{-3}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{3} f(x)dx \right| = \left| \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx \right| + \left| \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3} \right|$$

$$= \left| (0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) \right| + \left| \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) - (0) \right| = \left| \frac{81}{4} \right| + \left| -\frac{81}{4} \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$$ وحدة مساحة

2007 تمهيدي

د المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفترة [2 , 2-]

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \in [-2 , 2]$ يجزأ OR $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \in [-2 , 2]$ لا يجزأ

$$A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)dx \right| = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} \right|$$

$$= |(0) - (4 - 8)| + |(4 - 8) - (0)| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$$ وحدة مساحة

2002 دور 1

د المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ بالتفرة [1,3]

sol : $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$

either $x = 0 \notin [1,3]$, or $x = 2 \in [1,3]$

$$A = \left| \int_{1}^{2} h(x)dx \right| + \left| \int_{2}^{3} h(x)dx \right| = \left| \int_{1}^{2} (x^2 - 2x)dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (x^2 - 2x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{1}^{2} \right| + \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{2}^{3} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) \right| + \left| (9 - 9) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) \right| = \dots = 2 \text{ unit}^2$$

2002 دور 2

د المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = 3x^2 \quad , \quad g(x) = x^4 - 4$

sol : $h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 4 - 3x^2 = x^4 - 3x^2 - 4$

if $h(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$ يهمل

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ OR $x = -2$

$A = \left| \int_{-2}^{2} f(x)dx \right| \quad = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)dx \right|$

$= \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} \right| = \left| \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) - \left(\frac{-32}{5} + 8 + 8\right) \right|$

$= \left| \frac{32}{5} - 8 - 8 + \frac{32}{5} - 8 - 8 \right| = \left| \frac{64}{5} - 32 \right| = \left| \frac{64 - 160}{5} \right| = \left| \frac{-96}{5} \right| = \frac{96}{5}$ unit^2

2005 دور 1

د المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow x(x + 3)(x + 1) = 0$

$x = 0$ OR $x = -3$ OR $x = -1$

$A = \left| \int_{-3}^{-1} f(x)dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} f(x)dx \right|$

$A = \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx \right|$

$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} \right|$

$= \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right) \right| + \left| (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) \right|$

$= \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2}\right) \right| + \left| -\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right|$

$= \left| \frac{-80}{4} + \frac{104}{3} - \frac{24}{2} \right| + \left| \frac{-3+16-18}{12} \right| = \left| -32 + \frac{104}{3} \right| + \left| \frac{-5}{12} \right|$

$= \left| \frac{8}{3} \right| + \left| \frac{-5}{12} \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12}$ وحدة مساحة

2006 تمهيدي
2013 دور 1

د المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0$ **OR** $x = 2$ **OR** $x = 1$

$A = |\int_0^1 f(x)dx| + |\int_1^2 f(x)dx|$

$A = |\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx| + |\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx|$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_0^1| + |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_1^2|$

$= |(\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0)| + |(4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1)|$

$= |\frac{1}{4}| + |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

2008 تمهيدي
2010 تمهيدي

د المساحة المحددة بالمنحي $f(x) = 3x^2 + 4$ ومحور السينات بالفترة [-2,2]

sol : $y \neq 0$ حيث $3x^2 + 4 > 0$ دائما

$A = |\int_{-2}^2 f(x)dx| = |\int_{-1}^1 (3x^2 + 4)dx|$

$= |[x^3 + 4x]_{-2}^2| = |(8 + 8) - (-8 - 8)| = |16 + 16| = 32$ وحدة مساحة

2014 خارج القطر

د المساحة المحددة بين منحني القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y=2x + 3$

sol : $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 , x = -1$

$A = |\int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3)\,dx| = \dots$

2015 تمهيدي

جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x$, $y = x^3$

sol : $h(x) = x^3 - x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0$ OR $x = 1$ OR $x = -1$

$A = |\int_{-1}^{0} h(x)dx| + |\int_{0}^{1} h(x)dx|$

$= \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right|$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$= |(0-0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})| + |(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0-0)|$

$= |\frac{1}{4}| + |\frac{-1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

2012 تمهيدي

جد المساحة المحددة بالمنحنيين $y = 2x^2$, $y = x^4 - 8$

sol : $h(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$A = |\int_{-2}^{2} h(x)dx| = |\int_{-2}^{2}(x^4 - 2x^2 - 8)dx|$

$= |\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}| = ...$

2012 دور 1

جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1 , 3]$

sol: $(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1 , 3]$

$A = |\int_{-1}^{1} f(x)dx| + |\int_{1}^{3} f(x)dx| = |\int_{-1}^{1}(x-1)^3dx| + |\int_{1}^{3}(x-1)^3dx|$

$= |[\frac{1}{4}(x-1)^4]_{-1}^{1}| + |[\frac{1}{4}(x-1)^4]_{1}^{3} = ... = 8$ unit^2

2013 دور 3

جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1 , 3]$

$A = |\int_{1}^{3} f(x)dx| = |\int_{1}^{3}(x^2)dx|$

$= |\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{3}| = |(9) - (\frac{1}{3})| = |\frac{26}{3}| = \frac{26}{3}$ وحدة مساحة

2014 تمهيدي

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 4$ ومحور السينات وعلى الفترة [-2,3]

sol : if $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2 \in [-2, 3]$ لاتجزأ , $x = 2 \in [-2, 3]$

$A = |\int_{-2}^{2} f(x)dx| + |\int_{2}^{3} f(x)dx|$

$= |\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)dx| + |\int_{2}^{3}(x^2 - 4)dx|$

$= |\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}| + |\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{2}^{3}|$

$= |(\frac{8}{3} - 8) - (-\frac{8}{3} + 8)| + |(9 - 12) - (\frac{8}{3} - 8)|$

$= |-\frac{16}{3} - \frac{16}{3}| + |-3 + \frac{16}{3}|$

$= \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{39}{3} = 13$ وحدة مساحة

1998 دور 2
2004 دور 1
2009 تمهيدي
2014 دور 1
2015 خارج دور 1

جد المساحة المحددة بالمنحنيين $y = \sin x \cdot \cos x$, $y = \sin x$ بالفترة $[0, 2\pi]$

sol : $h(x) = \sin x\cos x - \sin x = \sin x(\cos x - 1)$

$\Rightarrow \sin x(\cos x - 1) = 0$

اما $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi]$ OR $x = \pi \in [0, 2\pi]$ OR $x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

او $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$

$A = |\int_{0}^{\pi} h(x)dx| + |\int_{\pi}^{2\pi} h(x)dx|$

$= |\int_{0}^{\pi} \sin x(\cos x - 1)dx| + |\int_{\pi}^{2\pi} \sin x(\cos x - 1)dx|$

$= |-\int_{0}^{\pi}(\cos x - 1)(-\sin x)dx| + |-\int_{\pi}^{2\pi}(\cos x - 1)(-\sin x)dx|$

$= |[\frac{-1}{2}(\cos x - 1)^2]_{0}^{\pi}| + |[\frac{-1}{2}(\cos x - 1)^2]_{\pi}^{2\pi}|$

$= \frac{1}{2}|[(\cos\pi - 1)^2 - (\cos 0 - 1)^2]| + \frac{1}{2}|[(\cos 2\pi - 1)^2 - (\cos\pi - 1)^2]|$

$= \frac{1}{2}|[(-1 - 1)^2 - (1 - 1)^2]| + \frac{1}{2}|[(1 - 1)^2 - (-1 - 1)^2]|$

$= \frac{1}{2}|4| + \frac{1}{2}|4| = 2 + 2 = 4$ وحدة مساحة

2001 دور 2
2016 دور 2

ـد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol : if $y = 0 \Rightarrow y = 1 - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , n = 0 , 1 , 2$$

$n = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ يجزأ التكامل

$n = 1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin [0 , \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$n = 2 \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin [0 , \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (**n**) لان الفترة في السؤال موجبة .

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| (\sin\frac{\pi}{2}) - (\sin 0) \right| + \frac{1}{2}\left| (\sin\pi) - (\sin\frac{\pi}{2}) \right| = \frac{1}{2}\left| (1) - (0) \right| + \frac{1}{2}\left| (0) - (1) \right|$$

$= \frac{1}{2}| 1| + \frac{1}{2}| -1 | = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

((ملاحظة ممكن ان يكون السؤال السابق بالصيغ التالية)))

{❶ $y = 1 - 2\sin^2 x$, ❷ $y = \cos^2 x - \sin^2 x$, ❸ $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ } = $\cos 2x$

{ ❹ $y = 2\sin^2 x - 1$, ❺ $y = 1 - 2\cos^2 x$, ❻ $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ } = $-\cos 2x$

2003 دور 2

ـد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \cos 2x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

2006 دور 2
2016 دور 1 خ

ـد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

2009 دور 2

ـد المساحة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos^2 x , g(x) = \sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

2004 دور 2

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = -\cos x$, $y = 1 + \cos x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol : $h(x) = 1 + \cos x + \cos x = 1 + 2\cos x$

$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد تساوي

$x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ or $x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx| = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)dx|$

$= |[x + 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}| = |(0) - (\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2})| = \frac{\pi}{2} + 2$ unit²

2005 دور 2
2006 دور 1

جد المساحة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol : $h(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

اما $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ OR $x = \pi \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

او $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$x = \frac{\pi}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (الربع الاول) OR $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ (الربع الرابع)

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$= |\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1)dx| + |\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1)dx|$

$= |-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)(-2\sin x)dx| + |-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - 1)(-2\sin x)dx|$

$= |[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2]_0^{\frac{\pi}{3}}| + |[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= \frac{1}{4}|[(2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2 - (2\cos 0 - 1)^2]| + \frac{1}{4}|[(2\cos\frac{\pi}{2} - 1)^2 - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2]|$

$= \frac{1}{4}|[(1 - 1)^2 - (2 - 1)^2]| + \frac{1}{4}|[(0 - 1)^2 - (1 - 1)^2]| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

2007 دور 1

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 4x$ ومحور السينات بالفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$

sol : if $y = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + n\pi \ , n = 0 , 1 , 2$

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة .

$n = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$n = 1 \Rightarrow 4x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ يجزأ التكامل

$n = 2 \Rightarrow 4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0 , \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx| = |\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 4x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x)dx|$

$= |\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= \frac{1}{4}|(\cos\pi) - (\cos 0)| + \frac{1}{4}|(\cos 2\pi) - (\cos\pi)| = \frac{1}{4}|(-1) - (1)| + \frac{1}{4}|(1) - (-1)|$

$= \frac{1}{4}|-2| + \frac{1}{4}|2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

2008 دور 2

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin 2x$ ومحور السينات بالفترة $[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$

sol : if $y = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + n\pi \ , n = 0 , 1 , 2$

لاحظ انه سنقوم بتعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة وسالبة .

$n = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$ يجزأ التكامل

$n = 1 \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$n = -1 \Rightarrow 2x = -\pi \Rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$A = |\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx| + |\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx| = |\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin 2x)dx| + |\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)dx|$

$= |\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}| + |\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}|$

$= \frac{1}{2}|(\cos 0) - (\cos -\pi)| + \frac{1}{2}|(\cos\pi) - (\cos 0)|$

$= \frac{1}{2}|(1) - (-1)| + \frac{1}{2}|(-1) - (1)|$

$= \frac{1}{2}|2| + \frac{1}{2}|-2| = 1 + 1 = 2$ وحدة مساحة

2012 خارج القطر

د المساحة المحددة بين المنحنيين $y = \sin x$, $y = \sin^2 x$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

sol : $h(x) = \sin^2 x - \sin x = \sin x (\sin x - 1)$

$\sin x (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow$ either $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi$

$n = 0 \Rightarrow \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$n = 1 \Rightarrow x = \pi \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة .

OR $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ التكامل

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \sin x\right] dx$

$|\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}| = |\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) + \cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) + \cos 0\right]|$

$= |\frac{\pi}{4} - 1| = 1 - \frac{\pi}{4}$ unit^2

لاحظ ان النصف قبل اجراء التكامل لم نستطع ان نخرجه الى خارج التكامل لأنه غير تابع لكل مابعده

2013 دور 2
2015 نازحين د1

د المساحة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sin x$, $f(x) = 2\sin x + 1$ على الفترة $[0, \frac{3\pi}{2}]$

sol : $h(x) = 2\sin x + 1 - \sin x = \sin x + 1$

$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ لاتجزئ التكامل

$A = |\int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x) dx| = |\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1) dx|$

$= |[-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}|$

$= |(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}) - (-\cos 0 + 0)| = |(\frac{3\pi}{2}) - (-1)| = \frac{3\pi+2}{2}$ وحدة مساحة

2014 تمهيدي خ

جد المساحة المحدد بالمنحني $f(x) = \cos x$ والمنحني $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

sol : $h(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$

زاوية الاسناد $\theta = \frac{\pi}{4}$ ودالة الظل تكون موجبة في الربعين الاول والثالث لذلك فان

$$x = \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad OR \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$A = |\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$$

$$= |\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx|$$

$$= |[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}| + |[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$$

$$= |(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin(\frac{-\pi}{2}) + \cos(\frac{-\pi}{2}))| + |(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})|$$

$$= |(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (-1 + 0)| + |(1 + 0) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})|$$

$$= |(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1)| + |1 - \frac{2}{\sqrt{2}}| = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}|$$

$= (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

2003 دور 1
2010 تمهيدي

جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}$ m/sec وكان بعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20 m جد ازاحته عند كل t

حل \ اذا علمت معادلة السرعة وطلب ايجاد الازاحة في ثانية محددة او الازاحة في اي زمن وعلم في السؤال بعد الجسم والزمن المقطوع عنده فان نوع التكامل يكون غير محددا علما ان هذا الاحتمال تم تجاهله في المنهج الحالي ولابأس بالتطرق اليه للاحتياط

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt = \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{-1}{2}}\right)dt = \frac{3}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c$$

$s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c \Rightarrow 20 = 8 + 12 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$

1997 دور 1

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت 82m/sec بعد مرور (4)sec من بدء الحركة جد :

a) المسافة خلال الثانية الرابعة .

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني .

الحل :-

$v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int 18\,dt \Rightarrow v(t) = 18t + c$

$v(t) = 82$ عندما $t = 4$

$82 = 72 + c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 18t + 10$

a) $d = \left| \int_3^4 V(t)dt \right| = \left| \int_3^4 (18t + 10)dt \right|$

$= \left| [\,9t^2 + 10t\,]_3^4 \right| = \left| (144 + 40) - (81 + 30) \right|$

$= \left| 184 - 111 \right| = 73\ m$

b) $s = \int_0^{10} V(t)dt = \int_0^{10} (18t + 10)dt = [9t^2 + 10t\,]_0^{10}$

$= (900 + 100) - (0 - 0) = 1000\ m$

2015 دور 1

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت 82m/sec بعد مرور (4)sec من بدء الحركة جد :

1) المسافة خلال الثانية الثانية .

2) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين .

الحل :-

$v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int 18\,dt \Rightarrow v(t) = 18t + c$

$v(t) = 82$ عندما $t = 4$

$82 \quad 72 + c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 18t + 10$

1) $d = \left| \int_1^2 V(t)dt \right| = \ldots\ldots = 37\ m$

2) $s = \int_0^2 V(t)dt = \int_0^2 (18t + 10)dt = \ldots\ldots = 56\ m$

2000 دور 2

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (2t - 4)\ m/s$ جد المسافة المقطوعة بالفترة [1,6] ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

a) المسافة المقطوعة بالفترة [1 ، 6] .

sol : $v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1, 6]$

$$d = \left|\int_1^2 V(t)dt\right| + \left|\int_2^6 V(t)dt\right| = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^6 (2t-4)dt\right|$$

$$= \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^6\right|$$

$$= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |(36 - 24) - (4 - 8)|$$

$$= |-4 + 3| + |12 + 4| = 1 + 16 = 17\ m$$

b) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة .

sol : $s = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (2t-4)dt = [t^2 - 4t]_0^4$

$$= (16 - 16) - (0 - 0) = 0\ m$$

2003 دور 2

اذا كانت سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم هي $v(t) = 3t^2 + 6t + 3$ احسب

1. المسافة المقطوعة بالفترة [2,4]
2. الازاحة المقطوعة بالفترة [2,4]
3. الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18\ m/sec^2$

sol : $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 6t + 3 = 0 \Rightarrow 3(t^2 + 2t + 1) = 0 \Rightarrow 3(t + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow t = -1 \notin [2, 4]$

$$d = \left|\int_2^4 V(t)dt\right| = \left|\int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt\right|$$

$$= \left|[t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4\right| = |(64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)|$$

$$= |124 - 26| = 98m$$

$$s = \int_2^4 V(t)dt = \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt$$

$$= [t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4 = (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)$$

$$= 124 - 26 = 98m$$

$a(t) = v'(t) = 6t + 6 \Rightarrow 18 = 6t + 6 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow t = 2\ sec$

2004 دور 2

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره 5 m/sec^2 فاذا كان بعده من بدء الحركة يساوي 180 m بعد مرور 6 sec والسرعة عندها 45 m/sec جد السرعة عند t=2

الحل :-

$v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int 5\,dt \Rightarrow v(t) = 5t + c$

$v(t) = 45$ عندما $t = 6$

$45 = 30 + c \Rightarrow c = 15 \Rightarrow v(t) = 5t + 15$

$v(2) = 10 + 15 = 25$ m/s

تلميح \\ لو طلب ايجاد الازاحة او البعد في زمن محدد او في اي زمن عندها نجري تكاملا غير محددا لان البعد معلوم 180 بعد مرور 4 ثواني ومنها نستخرج قيمة c وهذا السؤال يدل على ان ليس بالضرورة ان كل المعلومات التي تعطى في السؤال يمكن الاستفادة منها .

2005 تمهيدي

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t + 2)\ m/s^2$ جد سرعة الجسم بعد مضي 2 sec من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة [2,6]

sol : $v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int (3t + 2)\,dt \Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$

بما ان التعجيل منتظم فأنه في بدء الحركة يكون فيها $t = 0$, $v = 0$ اي انه $c = 0$

$v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$

a) $v(2) = 6 + 4 = 10$ m/s

b) بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معين لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لايجزأ التكامل .

$d = |\int_2^6 V(t)dt| = |\int_2^6 (\frac{3}{2}t^2 + 2t)dt| = |[\frac{1}{2}t^3 + t^2]_2^6|$

$= |(108 + 36) - (4 + 4)| = |136| = 136$ m

2007 تمهيدي
2014 خارج القطر
2014 دور 2
2016 دور 2

تتحرك نقطة مادية من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t-6t^2)$ m/s جد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عندها .

sol : نفرض ان الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول n

$s = \int_0^n V(t)dt = \int_0^n (100t - 6t^2)dt = [50t^2 - 2t^3]_0^n$

$= (50n^2 - 2n^3) - (0) = 50n^2 - 2n^3$

∵ الجسم عاد الى النقطة التي تحرك منها فان الازاحة تساوي (0)

$0 = 50n^2 - 2n^3 \Rightarrow 2n^2(25 - n) = 0 \Rightarrow n = 0$ يهمل OR $n = 25$ sec

$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \Rightarrow a(25) = 100 - 300 = -200$ m/sec^2

حل آخر \\

$s = \int V(t)dt = \int (100t - 6t^2)dt \Rightarrow s = 50t^2 - 2t^3 + c$

بما ان الحركة من السكون فان $(s=0 \ , \ t = 0)$

$0 = 0 + c \Rightarrow c = 0 \quad \Rightarrow s = 50t^2 - 2t^3$ بما ان الجسم عاد الى موضعه الاول فان$(s = 0)$

$0 = 50t^2 - 2t^3 \Rightarrow 2t^2(25 - t) = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل OR $t = 25$ sec

$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \Rightarrow a(25) = 100 - 300 = -200$ m/sec^2

2016 دور 2 خارج

تتحرك سيارة من السكون وبعد (t) دقيقة من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(50t - 3t^2)$ km/min جد الزمن اللازم لعودة السيارة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عند ذلك الزمن .

ans: $t = 0$ يهمل OR $t = 25$ min , $a(t) = -100$ km/min^2

2013 خارج القطر
2014 دور 4 انبار

سفينة شحن تتحرك بخط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t^2 - 6t + 3$ m/m احسب
1) المسافة المقطوعة ضمن الفترة الزمنية [2,4]
2) الازاحة المقطوعة بعد مرور خمسة دقائق من بدء الحركة .

sol : $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0 \Rightarrow 3(t - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow t = 1 \notin [2, 4]$

$d = \left| \int_2^4 V(t)dt \right| = \left| \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt \right|$

$= \left| [t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4 \right| = |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |26| = 26$ m

$s = \int_a^b V(t)dt = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt = [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$

$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65$ m

2007 دور 1
2015 تمهيدي 2

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره $10\ m/s^2$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعته 24 m/s جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

الحل :-

$v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int 10\,dt \Rightarrow v(t) = 10t + c$

$v(t) = 24$ عندما $t = 2$

$24 = 20 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow v(t) = 10t + 4$

a) $d = \left| \int_4^5 V(t)dt \right| = \left| \int_4^5 (10t + 4)dt \right|$

$= \left| [5t^2 + 4t]_4^5 \right| = |(125 + 20) - (80 + 16)| = 49$ m

b) $s = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (10t + 4)dt = [5t^2 + 4t]_0^4$

$= (80 + 16) - (0 - 0) = 96$ m

2010 دور 2

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 4t + 7)$ m/s جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها .

تلميح \\ المسافة المقطوعة بعد مرور t ثانية من بدء الحركة تعني بالفترة [0,t] وليس بالضرورة ان يكون تكاملا واحدا

sol : $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 7 \neq 0 \Rightarrow$

$d = | \int_0^4 V(t)dt |$

$= | \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt | = | [t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4 |$

$= | (64 + 32 + 28) - (0) | = 124$ m

$a(t) = v'(t) = 6t + 4 \Rightarrow a(4) = 24 + 4 = 28$ m/sec^2

2009 دور 1

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ m/min احسب المسافة المقطوعة بالفترة [0,2] ثم احسب الزمن الذي يصبح فيه التعجيل 18 m/min^2

sol : $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \Rightarrow 3(t-3)(t-1) = 0$

$\Rightarrow$ either $t = 1 \in [0, 2]$, or $t = 3 \notin [0,2]$

$d = | \int_0^1 V(t)dt | + | \int_1^2 V(t)dt |$

$= | \int_0^1 (3t^2 - 12t + 9)dt | + | \int_1^2 (3t^2 - 12t + 9)dt |$

$= | [t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1 | + | [t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2 |$

$= | (1 - 6 + 9) - (0) | + | (8 - 24 + 18) - (1 - 6 + 9) | = |4| + |-2| = 6$ m

$a(t) = v'(t) = 6t - 12 \Rightarrow 18 = 6t - 12 \Rightarrow 30 = 6t \Rightarrow t = 5$ min

---

2011 دور 2

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)$ m/sec^2 فاذا كانت سرعته قد اصبحت 90m/sec بعد مرور (4)sec احسب المسافة المقطوعة بالفترة [1,2]

sol : $v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int (4t + 12)\,dt \Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + c$

$v(t) = 90$ عندما $t = 4$

$90 = 32 + 48 + c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + 10$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معين لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لايجزأ التكامل .

$d = | \int_1^2 V(t)dt | = | \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt | = | \left[\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t\right]_1^2 |$

$= | (\frac{16}{3} + 24 + 20) - (\frac{2}{3} + 6 + 10) | = | \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16 |$

$= | \frac{14}{3} + 28 | = | \frac{14+84}{3} | = \frac{98}{3} = 32.6$ m

تمهيدي 2016

جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان $V(t) = 3t^2 - 6t$ فجد

1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1 , 3]$

sol : $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 3t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0 \notin [1,3]$ or $t = 2 \in [1 , 3]$

$$d = \left| \int_1^2 V(t)dt \right| + \left| \int_2^3 V(t)dt \right| = \left| \int_1^2 (3t^2 - 6t)dt \right| + \left| \int_2^3 (3t^2 - 6t)dt \right|$$

$$= \left| [t^3 - 3t^2]_1^2 \right| + \left| [t^3 - 3t^2]_2^3 \right|$$

$$= |(8 - 12) - (1 - 3)| + |(27 - 27) - (8 - 12)|$$

$$= |-4 + 2| + |0 + 4| = 2 + 4 = 6$$ وحدة طول

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1 , 3]$

sol : $s = \int_1^3 V(t)dt = \int_1^3 (3t^2 - 6t)dt = [t^3 - 3t^2]_1^3$

$$= (27 - 27) - (1 - 3) = 2$$ وحدة طول



2011 خارج القطر
2013 دور 3

المنطقة المحددة بالمنحني $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها .

sol : $V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi$ وحدة مكعبة

2012 خارج القطر
2015 تمهيدي

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y = 4x^2$ والمستقيمين y=0,y=16

sol : $V = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_0^{16} \frac{y}{4}\,dy = \pi\left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi\,(32 - 0) = 32\pi$

2011 دور 2
2014 تمهيدي

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمستقيمين x=0,x=2 حول محور السينات

sol : $V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^2 8x\,dx = \pi[4x^2]_0^2 = 16\pi$ وحدة مكعبة

2012 تمهيدي

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y = 2x^2$ والمستقيمين x=0,x=5 حول محور السينات

sol : $V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^5 4x^4\,dx = \pi\left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^5 = 2500\pi$ وحدة مكعبة

2012 دور اول

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 1$, $y = 2$ حول محور الصادات

sol : $y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$$V = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_1^2 (y-1)\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_1^2 = \pi\,[(2-2) - (\tfrac{1}{2} - 1)] = \tfrac{1}{2}\pi \text{ unit}^3$$

2012 دور 2

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sqrt{5}\,x^2$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 2$ حول المحور السيني

sol : $\because\ y = \sqrt{5}\,x^2 \Rightarrow y^2 = 5x^4$

$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_1^2 5x^4\,dx = \pi\left[\frac{5}{5}x^5\right]_1^2 = (32 - 1)\pi = 31\pi$ وحدة مكعبة

2013 دور 1
2015 خارج 1
2016 دور 1 خ

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي

sol : $y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$ if $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$$V = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_1^4 (y-1)\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_1^4 = \pi\,[(8-4) - (\frac{1}{2} - 1)] = \frac{9}{2}\pi\ u^3$$

2013 دور 2

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 1$, $y = 2$ حول المحور الصادي

sol : $\because\ y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$$V = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy = \pi\int_1^2 y^{-2}\,dy = \pi\left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi\,(\frac{-1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\pi$$

2015 دور3
2015 حد4 رصافة

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ دورة كاملة حول المحور الصادي .

sol : $x = 1 \Rightarrow y = 1$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

نفس الحل السابق ....

تأكيد \\ اذا كان الدوران حول محور السينات وعلمت قيمتين لـ(y) فنقوم بتعويضهما بالمعادلة الاصلية لأستخراج قيمتي (x) والعكس بالعكس علما ان هذه الملاحظة مثيرة للجدل ويبقى العمل بها مادامت في الكتاب المنهجي .

تأكيد \\ في الطبعة الجديدة 2016 – 2017 تم حذف هذا السؤال وتم استبداله بالسؤال ادناه

مثال \ اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ حيث $1 \le y \le 3$ دورة كاملة حول محور الصادات .

الحل :-

$y = \frac{3}{x} \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y}$

$$V = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_1^3 \frac{9}{y^2}\,dy = \pi\int_1^3 9y^{-2}\,dy = \pi\left[\frac{-9}{y}\right]_1^3 = \pi\,(\frac{-9}{3} + 9) = 6\pi\ u^3$$

2014 دور 2

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمين $x = 0\ ,\ x = 2$ حول المحور السيني

sol : $V = \pi\int_a^b y^2\, dx = \pi\int_0^2 x^3\, dx = \pi\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4\pi$ وحدة مكعبة

2014 دور 3

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ والمستقيمين $y = 1\ ,\ y = 4$ حول المحور الصادي

sol : $V = \pi\int_a^b x^2\, dy = \pi\int_1^4 \frac{1}{y}\, dy = \pi[\ln y]_1^4 = \pi\,(\ln 4 - \ln 1) = \pi \ln 4 = 2\pi \ln 2$

2014 نازحين

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0\ ,\ y = 1$ حول محور الصادات

sol : $\because y = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4} = \frac{1}{4}y$

$$V = \pi\int_a^b x^2\, dy = \pi\int_0^1 \frac{1}{4}y\, dy = \pi\left[\frac{1}{8}y^2\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{8} - 0\right) = \frac{1}{8}\pi \ \text{unit}^3$$



حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الخامس (المعادلات التفاضلية)

2005 دور 1

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

هل ان $y=\frac{\sin x}{a+b\cos x}$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos x+b}{(a+b\cos x)^2}$

sol: $\frac{dy}{dx}=\frac{(a+b\cos x).\cos x-\sin x\,(-b\sin x)}{(a+b\cos x)^2}=\frac{a\cos b+b\cos^2 x+b\sin^2 x}{(a+b\cos x)^2}$

$=\frac{a\cos b+b(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(a+b\cos x)^2}=\frac{a\cos b+b}{(a+b\cos x)^2}$

اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2007 تمهيدي

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

هل ان $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$

sol: $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\tan^2 x=(\tan x)^2$

$\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$ اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2008 تمهيدي

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

هل ان $y=\cot x$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}=2\csc^2 x\cot x$

$\frac{dy}{dx}=-\csc^2 x=-(\csc x)^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-2\csc x\,(-\csc x.\cot x)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2\csc^2 x\cot x$ اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2009 دور 1

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

هل ان $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos x).\cos x-\sin x\,(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$ اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2011 دور 1
2014 تمهيدي

هل ان $y = x^3 - x - 2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$

sol : $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

LHS: $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 6x - 6x = 0$: RHS اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2011 دور 1
2014 نازحين

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

sol : $(3y^2 + e^y)\,dy = \cos x\,dx$

$\Rightarrow \int (3y^2 + e^y)\,dy = \int \cos x\,dx$

$y^3 + e^y = \sin x + c$ لاحظ الفرق بين سؤال الكتاب والسؤال الوزاري ادناه

2011 خارج القطر

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$

sol : $3y^2\,dy = \cos x\,dx \Rightarrow \int 3y^2\,dy = \int \cos x\,dx \Rightarrow y^3 = \sin x + c$

2015 دور 3

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{6y^2 + e^y}$

sol : $(6y^2 + e^y)\,dy = \sin x\,dx$

$\Rightarrow \int (6y^2 + e^y)\,dy = \int \sin x\,dx$

$2y^3 + e^y = -\cos x + c$

2011 دور 2

هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 5$

sol : $2y\,y' = 6x + 3x^2 \Rightarrow [\,2y\,y'' + y' . 2\,y' = 6 + 6x\,]$ بالقسمة على (2)

$y\,y'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5 \quad \because$ LHS $\neq$ RHS

اذن العلاقة المعطاة $y^2 = 3x^2 + x^3$ هي ليست حلا للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 5$

2015 دور 1
2015 نازحين د1

هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$

ستكون العلاقة المعطاة حلا للمعادلة التفاضلية المعطاة

2011 دور 2

حل المعادلة التفاضلية $e^x\,dx - y^3\,dy = 0$

sol : $y^3\,dy = e^x\,dx \Rightarrow \int y^3\,dy = \int e^x\,dx$

$\frac{1}{4}y^4 = e^x + c$

2011 خارج القطر
2015 دور 4 رسالة

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

sol : $y' = 2.e^{2x} - 3.e^{-3x}$, $y'' = 4.e^{2x} + 9.e^{-3x}$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

LHS : $y'' + y' - 6y = 4.e^{2x} + 9.e^{-3x} + 2.e^{2x} - 3.e^{-3x} - (6)(e^{2x} + e^{-3x})$

$= 6.e^{2x} + 6.e^{-3x} - 6.e^{2x} - 6.e^{-3x} = 0 = RHS$

$\because$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2012 دور 1
2015 تمهيدي
2016 دور 2 خارج

برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

sol : $y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$, $y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

LHS : $y'' + 4y = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0 = RHS$

$\because$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2012 دور 2

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث $x=2$, $y=2$

sol : $\frac{dy}{y-1} = (x+1)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)\,dx$

$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x + c \Rightarrow \ln|2-1| = \frac{1}{2}(4) + 2 + c \Rightarrow c = -4$

$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ الحل المطلوب

2012 دور 2
2013 دور 1
2016 تمهيدي

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

sol : $\frac{dy}{dx} = v + e^{v}$ .... (1

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ .... (2

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^{v}$ .... (3

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$x\frac{dv}{dx} = e^{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{e^{v}} \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{-v}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int e^{-v}dv$

$\ln|x| = -e^{-v} + c \Rightarrow \ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{-1}{e^{\frac{y}{x}}} + c$

2012 تمهيدي
2013 دور 1

بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

sol : $y' = -ae^{-x}$

LHS : $y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = RHS$

$\because$ LHS = RSH اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

برهن ان $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

sol : $y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$

2012 خارج القطر

LHS : $y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2013 دور 2
2014 دور 3

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad ; x = 1 , y = 2$

sol : $\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3-y) \Rightarrow \frac{dy}{3-y} = x\,dx$

$\int\frac{dy}{3-y} = \int x\,dx \Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 + c$

$-\ln|3-2| = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

2012 خارج القطر
2014 دور 4 اذار

حل المعادلة التفاضلية $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$

sol : $\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = \tan v + v$ .... (1

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ .... (2

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = \tan v + v$ ...... (3

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \tan v \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tan v}dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \cot v\, dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\cos v}{\sin v}dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{\cos v}{\sin v}dv \Rightarrow \ln|x| = \ln|\sin v| + \ln|c| \quad , c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(\sin v)| \Rightarrow |x| = |c(\sin v)| \Rightarrow x = \pm c(\sin v) \Rightarrow x = \pm c\left(\sin\frac{y}{x}\right)$$

2013 دور 2

حل المعادلة التفاضلية $(3x - y)\, y' = x + y$

sol : $(3x - y)\, y' = x + y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{3x-y}$ بقسمة البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \quad \text{.......... (1}$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{............. (2}$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \quad \text{.......... (3}$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(1+v)-v(3-v)}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v+v^2}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(1-v)^2}{3-v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(3-v)\,dv}{(1-v)^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2+(1-v)}{(1-v)^2}\,dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{(1-v)^2}\,dv + \frac{(1-v)}{(1-v)^2}\,dv$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{(1-v)^2}\,dv + \frac{1}{(1-v)}\,dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{2}{(1-v)^2}\,dv + \int\frac{1}{(1-v)}\,dv$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = 2\int(1-v)^{-2}\,dv + \int\frac{1}{(1-v)}\,dv \Rightarrow \ln|x| = (-2)[-(1-v)^{-1}] - \ln|1-v| + c$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \ln|1-v| = \frac{2}{(1-v)} + c \Rightarrow \ln|x(1-v)| = \frac{2}{(1-v)} + c$$

$$\Rightarrow \ln\left|x\left(1-\frac{y}{x}\right)\right| = \frac{2}{\left(1-\frac{y}{x}\right)} + c \Rightarrow \ln|x-y| = \frac{2}{\left(\frac{x-y}{x}\right)} + c \Rightarrow \ln|x-y| = \frac{2x}{x-y} + c$$

2013 دور 3
2014 دور 1

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

sol : $y' = 2x + 3$ نعوضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS : $xy' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

RHS : $x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$

$\because$ LHS = RSH $\Rightarrow$ العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

2013 دور 3
2015 خارج 1د

حل المعادلة التفاضلية $x y' = y - x$ حيث $x = 1 \ , y = 1$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v - 1$ .... (1

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ .... (2

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1$ .... (3

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$x\frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int dv$

$\ln|x| = -v + c \Rightarrow \ln|x| = -\frac{y}{x} + c \Rightarrow \ln|1| = -1 + c \Rightarrow c=1$

$\Rightarrow \ln|x| = -\frac{y}{x} + 1$

2013 خارج القطر
2015 دور 2

بين ان $\ln|y| = x^2 + c$ حيث $c \in R$ هو حلا للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$

sol : $\frac{1}{y}y' = 2x \Rightarrow y' = 2xy \Rightarrow$

$y'' = 2x\,y' + 2y \Rightarrow y'' = 2x(2xy) + 2y \Rightarrow y'' = 4x^2 y + 2y$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفي متساويين

LHS : $y'' = 4x^2 y + 2y$, RHS : $4x^2 y + 2y$

$\because$ LHS = RHS اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2013 خارج القطر

حل المعادلة التفاضلية $2xy\,y' - y^2 + x^2 = 0$

sol : $2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v)^2-1}{2(v)} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} \quad \ldots\ldots\ldots\ (3$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2-1}{2v}$$

$$-(v^2+1)\,dx = 2\,x\,v\,dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-2v\,dv}{v^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2v\,dv}{v^2+1} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|v^2+1| + \ln c \ ,\ c > 0$$

$$\ln|c| = \ln|x| + \ln|v^2+1|$$

$$\ln|c| = \ln|x(v^2+1)| \Rightarrow c = \pm x(v^2+1) \Rightarrow c = \pm x[(\frac{y}{x})^2+1]$$

$$c = \pm x(\frac{y^2}{x^2}+1) \Rightarrow c = \pm x(\frac{y^2+x^2}{x^2}) \Rightarrow c = \pm(\frac{y^2+x^2}{x})$$

2014 دور 2

بين ان $\ln y^2 = x + a \ , a \in R$ هو حلا للمعادلة $2y' - y = 0$

sol : $(\frac{1}{y^2})(2y)\,y' = 1 \Rightarrow \frac{2}{y}y' = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2014 دور 2

حل المعادلة التفاضلية $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$

sol : $xydy = -(y^2 - x^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{xy}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-(\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \ ....(1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ ....(2$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \ ......(3$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2-v^2}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v^2}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{1-2v^2}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{v\,dv}{1-2v^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \frac{-1}{4}\int\frac{-4v\,dv}{1-2v^2} \Rightarrow \ln|x| = \frac{-1}{4}\ln|1-2v^2| + \ln c \ , c > 0$$

$$\ln|x| = -\ln|(1-2v^2)^{\frac{1}{4}}| + \ln c \Rightarrow \ln|c| = \ln|(1-2v^2)^{\frac{1}{4}}| + \ln|x|$$

$$\ln|c| = \ln|x\sqrt[4]{1-2v^2}| \Rightarrow c = \pm x\sqrt[4]{1-2v^2} \Rightarrow c = \pm x\sqrt[4]{1-2(\frac{y}{x})^2}$$



2014 دور 3

اثبت ان $y = x\ln x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , x > 0$

sol : $\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS : $x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x\ln x$

RHS : $x + y = x + x\ln x = x + x\ln x$

$\because$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2016 تمهيدي

اثبت ان $y = x\ln x - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , x > 0$

sol : $\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) - 1 = \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS : $x\frac{dy}{dx} = x\ln x$

RHS : $x + y = x + x\ln x - x = x\ln x$

$\because$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2014 دور 4 ايار

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\tan^2 y\, dy = \sin^3 x\, dx$

sol : $\int \tan^2 y\, dy = \int \sin^3 x\, dx \Rightarrow$

$\int (\sec^2 y - 1)dy = \int \sin x \,.\, \sin^2 x\, dx$

$\int (\sec^2 y - 1)dy = \int \sin x\,.(1 - \cos^2 x)\, dx$

$\int (\sec^2 y - 1)dy = \int (\sin x - \cos^2 x\,.\sin x)\, dx$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

2014 نازحين

برهن ان $y = \cos x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$

sol : $y' = -\sin x \Rightarrow y'' = -\cos x$

LHS : $y'' + y = -\cos x + \cos x = 0 = $ RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2014 تمهيدي

حل المعادلة التفاضلية $y=\frac{\pi}{4}\ ,x=1$ $y'=\frac{\cos^2 y}{x}$

sol : $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y}{x} \Rightarrow \sec^2 y\,dy=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \sec^2 y\,dy=\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \tan y=\ln|x|+c$

$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{4}=\ln 1+c \Rightarrow 1=0+c \Rightarrow c=1 \Rightarrow \tan y=\ln|x|+1$

2012 دور 1
2012 تمهيدي
2014 دور 1
2015 تمهيدي
2015 دور 1

حل المعادلة التفاضلية $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

sol : $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}$

نفرض ان $\frac{y}{x}=v$ لينتج

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+V^2}{2}$ ……….. (1

نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ……….. (2

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+V^2}{2}$ ……. (3

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=(\frac{1+v^2-2v}{2}) \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(v^2-2v+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(v-1)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}dx}{x}=\frac{1}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \int\frac{\frac{1}{2}dx}{x}=\int\frac{1}{(v-1)^2}dv$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}=\int(v-1)^{-2}dv \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x|=-(v-1)^{-1}+c$

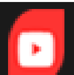
$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x|=\frac{-1}{v-1}+c \Rightarrow \frac{-1}{v-1}=\frac{1}{2}\ln|x|-c \Rightarrow \frac{-1}{v-1}=\frac{\ln|x|-2c}{2}$

$\Rightarrow \frac{v-1}{-1}=\frac{2}{\ln|x|-2c} \Rightarrow v-1=\frac{-2}{\ln|x|-2c} \Rightarrow v=1-\frac{2}{\ln|x|-2c}$

$\Rightarrow \frac{y}{x}=1-\frac{2}{\ln|x|-2c} \Rightarrow y=x-\frac{2x}{\ln|x|-2c}$

let $2c=c_1 \Rightarrow y=x-\frac{2x}{\ln|x|-c_1}$





2015 خارج ١
2016 دور 2

اثبت ان $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة $y^3 y'' = -2$

sol : $4x + 2y y' = 0 \Rightarrow 2y y' = -4x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$

$$y'' = \frac{(y)(-2) - (-2x)(y')}{y^2} = \frac{-2y + 2x(y')}{y^2} = \frac{-2y + 2x(\frac{-2x}{y})}{y^2} = \frac{\frac{-2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2}{y^3}$$

م بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS : $y^3 y'' = y^3 \left(\frac{-2}{y^3}\right) = -2 =$ RHS

$\because$ LHS = RHS اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

تذكير \\ اذا كان الاشتقاق ضمنيا وكانت المعادلة التفاضلية تحتوي على نوع واحد من المشتقات فيفضل تبسيط المشتقة الاولى قبل الانتقال الى المشتقة الثانية اما اذا كانت تحتوي على اكثر من نوع من المشتقات فيفضل الانتقال الى المشتقة الثانية مباشرة بعد حساب المشتقة الاولى

ملاحظة \\ يمكن ان يكون السؤال السابق هو:-

هل ان $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة $y y'' + (y')^2 = -2$

Sol: $4x + 2y y' = 0 \Rightarrow 4 + 2y y'' + y' . 2y' = 0 \Rightarrow [2y y'' + 2(y')^2 + 4 = 0] \div 2$

$y y'' + (y')^2 + 2 = 0 \Rightarrow y y'' + (y')^2 = -2$



2015 تمهيدي د1

حل المعادلة التفاضلية $(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0$

sol : $(2x + 3y)dy = -(x + 2y)dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-2y}{2x+3y}$ نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x-2y}{x}}{\frac{2x+3y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1-2(\frac{y}{x})}{2+3(\frac{y}{x})}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} \quad \ldots\ldots (3$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v-v(2+3v)}{2+3v} \Rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v} \Rightarrow -x\frac{dv}{dx} = \frac{1+4v+3v^2}{2+3v}$$

let $u = 1 + 4v + 3v^2$

$u' = 4 + 6v = 2(2 + 3v)$

$$\frac{-dx}{x} = \frac{2+3v}{1+4v+3v^2}dv \Rightarrow \int\frac{-dx}{x} = \int\frac{2+3v}{1+4v+3v^2}dv$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int\frac{2(2+3v)}{1+4v+3v^2} \Rightarrow -\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|1 + 4v + 3v^2| + c$$

$$-c = \ln|(1+4v+3v^2)^{\frac{1}{2}}| + \ln|x|$$

$$\Rightarrow \ln c_1 = \ln|x.\sqrt{1+4v+3v^2}|, c_1 > 0 \Rightarrow c_1 = |x.\sqrt{1+4v+3v^2}|$$

$$\Rightarrow c_1 = |x.\sqrt{1+\frac{4y}{x}+\frac{3y^2}{x^2}}| \Rightarrow c_1 = |x.\sqrt{\frac{x^2+4xy+3y^2}{x^2}}|$$

2015 دور 2 خارج

حل المعادلة التفاضلية $(y^2 - xy) = -x^2\,dy$

sol : $x^2\,dy = -(y^2 - xy)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy - y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v - v^2$ ………… (1

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ …………… (2

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$ ……. (3

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = -v^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-dv}{v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -v^{-2}\,dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -v^{-2}\,dv \Rightarrow \ln|x| = v^{-1} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{v} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c$$

$$\ln|x| = \frac{x}{y} + c \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln|x| - c \Rightarrow y = \frac{x}{\ln|x| - c}$$

2015 دور 2 خارج

2016 دور1 خ

هل ان $yx = \sin 5x$ حلا للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$

Sol : $y + x\,y' = 5\cos 5x \Rightarrow y' + xy'' + y' = -25\sin 5x$

$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0 \Rightarrow xy'' + 2y' + 25xy = 0$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2015 دور 2

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x + 1)\frac{dy}{dx} = 2y$

sol : نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة $g(y)dy = f(x)dx$

$$(x + 1)dy = 2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln(x + 1) + c$$

$$\ln|y| = \ln(x + 1)^2 + c \Rightarrow \ln|y| = \ln(x + 1)^2 + \ln c_1$$

$$\ln|y| = \ln c_1(x + 1)^2 \Rightarrow |y| = c_1(x + 1)^2$$

2015 د4 رسالة

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y^2}{xy+x^2}$

sol : بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy+x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})+1} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \quad \ldots\ldots\ldots (1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (2$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \quad \ldots\ldots (3$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v^2 - v}{v+1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$$

$$x(v+1)\,dv = -v\,dx \Rightarrow \int \frac{(v+1)\,dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{v}{v}\,dv + \int \frac{1}{v}\,dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int dv + \int \frac{1}{v}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$v + \ln|v| = -\ln|x| + c \Rightarrow \frac{y}{x} + \ln|\frac{y}{x}| = -\ln|x| + c$$

تعقيب \\ بالرغم من ان السؤال غير موجود نصا في الكتاب المنهجي الا ان فكرته منهجية ويعتبر من الاسئلة المتوسطة الصعوبة او ماهو دون ذلك ويكون السؤال اكثر صعوبة قليلا ان كان التكامل بالشكل التالي

$$\int \frac{v\,dv}{v+1} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{[(v+1)-1]\,dv}{v+1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(v+1)\,dv}{v+1} - \int \frac{1}{v+1}\,dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int dv - \int \frac{dv}{v+1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$v - \ln|v+1| = -\ln|x| + c \Rightarrow \frac{y}{x} - \ln|\frac{y}{x}+1| = -\ln|x| + c$$

2016 دور 1 خ

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

sol : $xy\frac{dy}{dx} = = 1 - 2y^2 \Rightarrow xy\,dy = (1 - 2y^2)\,dx$

$$\frac{y}{1-2y^2}dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int\frac{y}{1-2y^2}dy = \int\frac{1}{x}dx$$

$$(-\frac{1}{4})\int\frac{-4y}{1-2y^2}dy = \int\frac{1}{x}dx \Rightarrow (-\frac{1}{4})\ln|1 - 2y^2| = \ln|x| + c$$

$$\ln|(1-2y^2)^{\frac{-1}{4}}| = \ln|x| + \ln c_1 \ , \ c_1 > 0$$

$$\ln|(1-2y^2)^{\frac{-1}{4}}| = \ln|c_1x| \Rightarrow |(1-2y^2)^{\frac{-1}{4}}| = |c_1x|$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2y^2}} = c_1x$$ الحل العام للمعادلات التفاضلية

2016 دور اول

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2 , y = 9$

sol : نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة $g(y)dy = f(x)dx$

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx \Rightarrow \int y^{\frac{-1}{2}}dy = \int x\,dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow x = 2 \ , \ y = 9 \Rightarrow 2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c$$

$$6 = 2 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4$$

اسلوب الكتاب يفضل ولا يجب اجراءه

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 4\sqrt{y} = x^2 + 2c \Rightarrow 4\sqrt{y} = x^2 + c_1$$

$$\because x = 2, y = 9 \Rightarrow 4\sqrt{9} = (2)^2 + c_1 \Rightarrow 12 = 4 + c_1 \Rightarrow c_1 = 8$$

$$4\sqrt{y} = x^2 + 8 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2 \Rightarrow y = (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2$$

2016 دور اول

حل المعادلة التفاضلية

$$x^2y\,dx = (x^3 + y^3)\,dy$$

sol : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$ بقسمة البسط والمقام على $x^3 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3+y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^3} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$ ……….. (1

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ………….. (2

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$ …… (3

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v-v(1+v^3)}{1+v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v-v-v^4}{1+v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{1+v^3}{v^4}dv \Rightarrow \int -\frac{dx}{x} = \int \frac{1+v^3}{v^4}dv \Rightarrow -\int\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{v^4}dv + \int\frac{v^3}{v^4}dv$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int v^{-4}dv + \int\frac{1}{v}dv \Rightarrow -\ln|x| = -\frac{1}{3}v^{-3} + \ln|v| + \ln|c| \quad , c > 0$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3v^3} + \ln|v| + \ln|c| \Rightarrow \frac{1}{3v^3} = \ln|x| + \ln|v| + \ln|c|$$

$$\frac{1}{3v^3} = \ln|cxv| \Rightarrow \frac{1}{3(\frac{y}{x})^3} = \ln|cx(\frac{y}{x})|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{3y^3}{x^3}} = \ln|cy| \Rightarrow \frac{x^3}{3y^3} = \ln|cy| \Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{3\ln|cy|} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt[3]{3\ln|cy|}}$$

2016 دور 2

حل المعادلة التفاضلية الآتية $(x^2 + 3y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

sol : $2xydy = (x^2 + 3y^2)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2+3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج $\frac{dy}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v}$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v}$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{1+v^2}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2v\,dv}{1+v^2} \Rightarrow \ln|x| = \ln|1+v^2| + \ln c \;,\; c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(1+v^2)| \Rightarrow |x| = |c(1+v^2)|$$

$$x = \mp c(1+v^2) \Rightarrow x = \mp c(1+(\frac{y}{x})^2) \Rightarrow x = \mp c(1+\frac{y^2}{x^2})$$

التقييم \ السؤال من التمارين العامة الخاصة بالكتاب المقرر ويعد من الاسئلة المتوسطة الصعوبة . ويمكن للطالب عدم كتابة السطرين الاخيرين وينتهي السؤال بمجرد اجراء التكامل على ان يستبدل v بـ $(\frac{y}{x})$

2016 دور 2 خارج

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$

sol :

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2-x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})} \Rightarrow$$ المعادلة متجانسة

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(v)^2-1}{2(v)} \text{ .... (1}$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ .... (2}$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3(v)^2-1}{2(v)} \text{ ...... (3}$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v}$$

$$(v^2-1)\,dx = 2vx\,dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{v^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v\,dv}{v^2-1} \Rightarrow \ln|x| = \ln|v^2-1| + \ln c \quad , c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(v^2-1)| \Rightarrow x = \pm c(v^2-1)$$

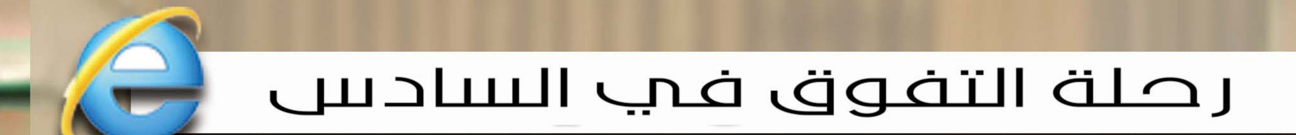
$$\Rightarrow c = \pm(\frac{x}{v^2-1}) \Rightarrow c = \pm(\frac{x}{(\frac{y}{x})^2-1}) \Rightarrow c = \pm\frac{x}{\frac{y^2}{x^2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm\frac{x}{\frac{y^2-x^2}{x^2}} \Rightarrow c = \pm\frac{x^3}{y^2-x^2}$$

يفضل ولا يجب التبسيط اي تقبل وزاريا دون تبسيط

تمت بعونه تعالى

للمزيد من الملازم والدروس وكل ما يخص طلبة السادس الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الأجتماعي ...



رحلة التفوق في السادس

telegram.me/A_M_Z_F

رحلة التفوق في السادس

www.instagram.com/rt_edu

رحلة التفوق في السادس

عطاء بلا حدود

ا.د مينا الاحمد

ا.د اشرف الوائلي